evropský sociální fond v ČR

EVROPSKÁ UNIE

MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY

OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

FINANČNÍ MATEMATIKA

SBÍRKA ÚLOH

GTŘEBOŇ

Zpracováno v rámci projektu " Vzdělávání pro konkurenceschopnost - konkurenceschopnost pro Třeboňsko", registrační číslo CZ.1.07/1.1.10/02.0063

Gymnázium, Třeboň, Na Sadech 308
Autor: RNDr. Pavel Krejča
Vydáno v březnu 2012

OBSAH

Součástí sbírky je CD s její elektronickou podobou a přiloženými programy (viz kapitola 5).
Vzhledem k termínu tisku sbírky může být její elektronická podoba mírně odlišná od tištěné.

Úvod

Tato sbírka úloh byla vytvořena v rámci projektu " Vzdělávání pro konkurenceschopnost - - konkurenceschopnost pro Třeboňsko", který byl realizován na Gymnáziu v Třeboni v letech 2010 - 2012. Téma finanční gramotnost bylo součástí aktivity 3 projektu "Rozvoj podnikatelských znalostí, schopností a dovedností žáků" a jeho hlavním cílem bylo zavedení finančního vzdělávání do výuky matematiky a občanské výchovy. Je mi známo, že již existuje řada učebních materiálů (zejména pro odborné školy) s úlohami finanční matematiky; většinou jsou však zaměřeny prakticky a kladou spíše důraz na výklad finanční terminologie a popis finančních produktů, než na matematickou stránku problému. Vzhledem k tomu, že finanční úlohy se musí na gymnáziu řešit téměř výhradně v hodinách matematiky, jsou v této sbírce chápány jako matematický problém a tak je k nim přistupováno. Proto je sbírka doplněna i o programy vytvořené v prostředí Mathematica 7, jejich doplňkem a zjednodušenou podobou jsou i tabulky Microsoft Excel. Tím je žákům nabídnuta možnost nejen využít pokročilou výpočetní techniku při řešení těchto úloh, ale i případně zasáhnout do úprav a rozšíření příslušného programového vybavení.

Na začátku každé kapitoly sbírky je uveden přehled použitých vztahů a stručné definice finančních pojmů, které se vyskytují v následných úlohách. Na konci sbírky jsou uvedeny výsledky všech úloh. V kapitole 6 je nabídnuto deset testů z látky předešlých kapitol.

Sbírka může být využita na všech středních školách, v omezené míře pak ve třídách nižšího gymnázia a ve vyšších ročnících základních škol. Obtížnější, zejména obecně zadané úlohy, jsou označeny (*).

1 ÚROČENÍ

Přehled užitých pojmů a vztahů

- **Úrok** je částka, kterou získává věřitel od dlužníka jako odměnu za půjčení peněz.
- **Úroková míra** (úroková sazba) *roční* je podíl úroku získaného *za rok* a zapůjčené částky za předpokladu jednoduchého úročení, udává se v procentech nebo jako desetinné číslo z intervalu (0; 1).
  V této sbírce bude vždy používána roční úr. míra, tedy úr.míra značená p.a. (per annum).
- **Daň z úroku** je část úroku, která se nevyplácí věřiteli a odvádí se státu; uvádí se v procentech. (Úrok z úvěru placený bance se nezdaňuje.)
- **Zdaňovací koeficient** k je dán vztahem $k = \frac{100-u}{100}$, kde u je daň z úroku v %.
- **Úroková doba** je doba, po kterou je zapůjčená částka (vklad nebo úvěr) úročena.
  *V této sbírce budeme pro určení úrokové doby výhradně používat **standard 30E/360,** ve kterém má každý měsíc 30 dní, rok má 360 dní. Do úrokové doby budeme jako poslední den úročení započítávat den splatnosti, nikoli však den vkladu nebo poskytnutí úvěru.*
- **Úrokovací období** je časový úsek mezi dvěma po sobě následujícími úročeními.
  Úrokovací období může být *roční, pololetní, čvrtletní, měsíční, týdenní, denní.*
- **Termínovaný vklad** (účet) má určenou dobu splatnosti, po kterou nelze z účtu bez sankcí peníze vybírat. Doba splatnosti může být *několik dní až několik let.*
- **Revolving** je obnovení termínovaného účtu za stejných podmínek na další úrokovací období. Zdaněný úrok z minulého období je připsán k účtu a s ním dále úročen.
- **Jednoduché úročení** je takový způsob úročení, při kterém se úrok na konci každého úrokovacího období počítá z počátečního kapitálu.
  Jestliže je n počet úrokovacích období, t počet dní úrokovacího období, i úroková (roční) míra vyjádřená desetinným číslem, k zdaňovací koeficient, K_0 vložený kapitál, pak pro výsledný kapitál na konci n-tého úrokovacího období K_n platí

  $$K_n = K_0 \cdot \left(1 + k \cdot i \cdot \frac{t}{360} \cdot n\right) \quad .$$

  Vzhledem k tomu, že výše úroku při jednoduchém úročení nezávisí na délce úrokovacího období, ale jen na celkové době úročení, platí

  $$K_n = K_0 \cdot \left(1 + k \cdot i \cdot \frac{T}{360}\right) \quad ,$$

  kde T je celková úroková doba ve dnech.
- **Složené úročení** je takový způsob úročení, při kterém se úroky přičítají k již dosaženému kapitálu a spolu s ním se dále úročí.
  Jestliže je n počet úrokovacích období, t počet dní úrokovacího období, i úroková (roční) míra vyjádřená desetinným číslem, k zdaňovací koeficient, K_0 vložený kapitál, pak pro výsledný kapitál na konci n-tého úrokovacího období K_n platí

$$K_n = K_0 \cdot \left(1 + k \cdot i \cdot \frac{t}{360}\right)^n \quad .$$

U obou způsobů úročení vypočteme čistý (zdaněný) **úrok** jako rozdíl **$K_n - K_0$** .

- **Míra inflace i_i** je relativní nárůst ceny zboží (přesněji rel. nárůst maloobchodních cen souboru vybraného zboží a služeb) v daném roce:

$$i_i = \frac{C_K - C_P}{C_P} \quad ,$$

kde C_P je cena na počátku a C_K cena na konci roku.

- **Efektivní úroková míra** je roční úrok. míra, která poskytuje za rok *při ročním úrokovacím období* stejný úrok jako daná úroková míra při kratším úrokovacím období.
- **Nominální úroková míra** je její jmenovitá hodnota, kterou uvádí banka bez ohledu na inflaci.

Úlohy 1

Jednoduché úročení

(Všechny částky zaokrouhlete, pokud není řečeno jinak, na koruny, daň z úroku je 15%.)

Příklad 1.1

Na nový účet jsme uložili dne 11.11.2007 částku ve výši 10 000 Kč. Určete, jaká částka byla na účtu na konci roku 2009 při úrokové míře 1,5 % a úrokovacím období půl roku, jestliže

a) jsme po uvedenou dobu neprovedli žádný vklad ani výběr,
b) jsme na začátku každého kalendářního roku vložili 5000 Kč,
c) jsme na konci roku 2008 vybrali 3000 Kč.

Příklad 1.2

Banka poskytla podnikateli úvěr ve výši 1 500 000 Kč na dva roky s úrokovou mírou 16 %.

a) Kolik Kč činí úrok z úvěru?
b) Kolik Kč celkem zaplatí podnikatel bance po 2 letech?
c) Jaká by musela být nejvyšší úroková míra, aby podnikatel za 2 roky na úrocích nezaplatil více než 400 000 Kč?
(Úrok placený bance se nezdaňuje.)

Příklad 1.3

Paní Králová si uložila na termínový vklad na 3 měsíce částku 56 000 Kč, úroková míra činila 2,6 %. Po dvou měsících potřebovala celý vklad vybrat, podle smlouvy však předčasný výběr není možný. Banka jí však poskytla úvěr ve výši 56 000 Kč na zbývající měsíc s úrokovou mírou 14 %. Vydělala nebo prodělala paní Králová na celé finanční operaci? O jakou částku jde?

Příklad 1.4

Zdůvodněte, že výše výsledného úroku při jednoduchém úročení nezávisí (při dané úrokové době) na délce úrokovacího období.

Příklad 1.5

Od banky si potřebujeme půjčit na 7 měsíců peníze. Víme, že na splacení dluhu budeme mít k dispozici na konci této doby 48 000 Kč. Úroková míra činí 13,5 %. Jakou nejvyšší částku si můžeme půjčit?
(Zaokrouhlete na stokoruny.)

Příklad 1.6

Klient banky uložil dne 8.2.2008 na vkladní knížku s úrokovou mírou 2,2 % částku 40 000 Kč. Vložený kapitál i s úrokem vybral dne 5.6.2008. Určete výšku úroku před zdaněním a po zdanění.

Příklad 1.7

Pan Nováček měl na běžném účtu s úrokovou mírou 1,6 % ke dni 1.8. částku 22 000 Kč. Dne 9.8. vybral 7 000 Kč, 17.8. uložil 15 000 Kč. Další pohyby na účtě v srpnu nebyly. Zjistěte úrok za měsíc srpen.

Návod: Předpokládejte změnu základu pro výpočet úroku vždy druhý den po provedení vkladu/výběru. Předešlé úroky se k základu nepřipočítávají.

Příklad 1.8

Na začátku roku 2005 jsme na účet s úrokovou mírou 3,6 % a úrokovým obdobím 1 měsíc uložili 100 000 Kč. Určete celkový kapitál na účtu na konci jednotlivých měsíců a koncem roku 2005, jestliže se již během roku nic neukládalo ani nevybíralo. Jakou posloupnost tvoří tyto hodnoty? (Během roku předpokládáme jednoduché úročení, úroky se připisují na účet.)

Příklad 1.9

Je výhodnější koupit dnes nemovitost za 1 800 000 Kč nebo za ni dát za 2 roky 1 900 000 Kč? Uvedenou částku máme možnost nyní investovat s roční úrokovou mírou 4,0 % .
(Předpokládáme jednoduché úročení po celé dva roky.)

Složené úročení

(Všechny částky zaokrouhlete, pokud není řečeno jinak, na koruny, daň z úroku je 15%.)

Příklad 1.10

Začátkem roku uložíme do banky částku 60 000 Kč na účet s úrokovou mírou 1,6 %. Jakou částku obdržíme po uplynutí 3 let od data vkladu, jestliže je úrokovací období

a) 1 rok,
b) 6 měsíců,
c) 3 měsíce,
d) 1 měsíc ?

Příklad 1.11

Na termínovaný účet s revolvingem uložíme na 1 měsíc částku 210 000 Kč, úrokovací období je jeden měsíc, úroková míra je 2,4 %. Účet celkem revolvujeme (obnovujeme) čtyřikrát.
Jakou výslednou částku budeme mít pak na účtu?

Příklad 1.12

Pan Adam a Břetislav si založili vkladní knížky s úrokovou mírou 1,9 %. Úročí se vždy na konci kalendářního roku. Pan Adam si počátkem roku 2006 uložil částku 60 000 Kč, rovněž tak učinil pan Břetislav. Pan Adam si počátkem každého roku vybral úrok za rok minulý, pan Břetislav si úroky nevybíral.

a) Jaký celkový úrok získal pan Adam do začátku roku 2010?
b) Jaký celkový úrok získal pan Břetislav do začátku roku 2010?
c) Kolik Kč činí rozdíl těchto úroků?

Příklad 1.13

Na termínovaný účet s pevnou úrokovou mírou 2 % a složeným úrokováním jsme uložili dne 8.2. částku 90 000 Kč. Úrokovací období je jeden měsíc, úročí se vždy na konci kalendářního měsíce (a v den splatnosti). Termínovaný účet byl zřízen na dobu půl roku, tedy den splatnosti byl 8.8. téhož roku. Kolik Kč nám vyplatí banka v den splatnosti?

Příklad 1.14

Řešte příklad 1.13 za předpokladu, že úroková míra je v průběhu termínovaného vkladu pohyblivá, a to následujícím způsobem: s platností od 1.4. se snižuje původní hodnota 2 % na 1,6 %, s platností od 1.6. se úroková míra zvyšuje na 2,2 % (a tato hodnota zůstává neměnná až do dne splatnosti).

Příklad 1.15

Jakou částku musíme uložit 1.ledna, abychom měli na účtě na konci roku 200 000 Kč, jestliže se úročí na konci každého čtvrtletí a úroková míra je 2,4 %?

Příklad 1.16

Na termínovaný účet na 14 dnů s revolvingem a úrokovou mírou 3,5 % uložíme 17 000 Kč. Kolikrát musíme účet obnovit, abychom na něm měli alespoň 17 350 Kč?

Příklad 1.17

Jaká musí být úroková míra, aby vklad ve výši 120 000 Kč vynesl za 5 let čistý úrok 10 000 Kč? Úročíme jednou za rok.

Příklad 1.18 (řešený)

Předpokládejme, že míra inflace byla vloni 2,5 %, v tomto roce je 2,6 %. Na začátku loňského roku jsme uložili na termínovaný vklad na 2 roky částku 100 000 Kč s úrokovou mírou 2,8 % a úrokovacím obdobím 1 rok.

a) Je hodnota kapitálu, který nám banka na konci tohoto roku vyplatí, vyšší nebo nižší než hodnota vkladu?
b) Jak vysoká by musela být nominální úroková míra termínovaného vkladu, aby hodnota výsledného kapitálu byla vyšší než hodnota vkladu?

Řešení:

a)

Ze vztahu $i_i = \frac{C_K - C_P}{C_P}$ plyne pro cenu na konci roku $C_k = C_p \cdot (1 + i_i)$.

Hodnotě 100 000 Kč na začátku minulého roku odpovídá na konci stejného roku hodnota 100 000 · 1,025 = 102 500 Kč. Tato hodnota se obdobně zvýší během letošního roku na 102 500 · 1,026 = 105 165 Kč.

Banka nám na konci tohoto roku vyplatí částku 100 000 · (1 + 0,85 · 0,028)^2 = 104 817 Kč, tedy částku nižší, než je současná hodnota odpovídající původnímu vkladu.

b)

V souladu s postupem v bodě a) musí platit

$100000 \cdot (1 + 0{,}85 \cdot i_n)^2 > 105165$, odkud dostaneme $i_n > 3$ % .

Příklad 1.19

Úroková míra vkladu činí 2 %, úrokovací období je 1 měsíc. Vypočtěte efektivní úrokovou míru.

Příklad 1.20

Na kolik Kč vzroste vklad 100 000 Kč uložený na dva roky a 4 měsíce při úrokové sazbě 1,8 %, jestliže je délka úrokovacího období

a) 1 rok,
b) ½ roku,
c) 1 měsíc ?

Návod: Použijte kombinaci složeného a jednoduchého úročení; pro dobu převyšující poslední ukončené úrokovací období užijte jednoduché úročení.

Příklad 1.21

Jaký je počáteční vklad a úroková míra, jestliže po 3 letech máme na účtu 215 693 Kč a po 5 letech 226 834 Kč? Předpokládejme složené úročení a úrokovací období 1 rok.

Příklad 1.22 (řešený)

Začátkem roku 2010 jsme uložili do banky 100 000 Kč na účet s úrokovou mírou 2,5 %.
Jaká částka bude na účtu koncem roku 2010, jestliže je úrokovací období (teoreticky)

a) 1 rok,
b) 6 měsíců,
c) 3 měsíce,
d) 1 měsíc,
e) 1 den,
f) nekonečně krátké,
g) 1 rok, ale předpokládáme jednoduché úročení.

Řešení:

Použijeme vzorec $K_n = K_0 \cdot \left(1 + k \cdot i \cdot \frac{t}{360}\right)^n$ pro složené úročení, přičemž n = 360/t .

a) $K_1 = 100000 \cdot \left(1 + 0.85 \cdot 0,025 \cdot \frac{360}{360}\right)^{\frac{360}{360}} = 102125$ Kč .

b) $K_2 = 100000 \cdot \left(1 + 0.85 \cdot 0,025 \cdot \frac{180}{360}\right)^{\frac{360}{180}} = 102136$ Kč.

c) $K_4 = 100000 \cdot \left(1 + 0.85 \cdot 0,025 \cdot \frac{90}{360}\right)^{\frac{360}{90}} = 102142$ Kč.

d) $K_{12} = 100000 \cdot \left(1 + 0.85 \cdot 0,025 \cdot \frac{30}{360}\right)^{\frac{360}{30}} = 102146$ Kč.

e) $K_{360} = 100000 \cdot \left(1 + 0.85 \cdot 0,025 \cdot \frac{1}{360}\right)^{\frac{360}{1}} = 102148$ Kč.

f) Tuto část úlohy úlohy musíme řešit s využitím diferenciálního počtu. Máme totiž určit limitu $K_\infty = \lim_{n\to\infty}\left[K_0 \cdot \left(1 + \frac{k \cdot i}{n}\right)^n\right] = K_0 \cdot e^{k \cdot i} = 100000 \cdot e^{0,85 \cdot 0,025} = 102148$ Kč.

Vidíme, že pokud výsledky zaokrouhlujeme na koruny, poslední dva se již neliší.
Pozn.: Případ, kdy t → 0, tedy n → ∞ , se nazývá **spojité úročení**.

g) Ze vzorce $K_n = K_0 \cdot \left(1 + \frac{k \cdot i \cdot t \cdot n}{360}\right)$ pro jednoduché úročení získáme

$K_1 = 100000 \cdot \left(1 + \frac{0,85 \cdot 0.025 \cdot 360 \cdot 1}{360}\right) = 102125$ Kč, tedy výsledek stejný jako v bodě a).

*Tuto úlohu lze ve všech jejích částech pohodlně řešit užitím přiloženého programu **A_Jedn_Sloz_Spoj_urok.nb** ; popis programu v kapitole 5.*

Příklad 1.23

Částku 300 000 Kč uložíme na účet s úrokovou mírou 5 % a úrokovacím obdobím 1 rok.
Zjistěte výši kapitálu na účtu po 5, 10, 15 a 20 letech za předpokladu úročení

a) jednoduchého,

b) složeného.

Sestrojte graf závislosti kapitálu na době trvání vkladu pro oba typy úročení.
(Vypočtěte více hodnot a sestrojte spojitou křivku. Vhodně zvolte soustavu souřadnou.)
*Graf viz užití programu **A_Grafy_Jedn_Sloz_urok. nb** v kapitole 5.*

Příklad 1.24

Dne 11.11. roku 2008 uložila paní Čechová na svůj spořící účet částku 68 000 Kč a další vklady již neprováděla. Celý zůstatek na účtu vybrala dne 21.5. roku 2011 a účet zrušila. Určete hodnotu zůstatku na účtu, jestliže po celou dobu trvání účtu byla úroková míra 1,8 % , úročí se vždy na konci kalendářního roku. Meziročně předpokládáme složené úročení.

2 ÚVĚRY

Přehled užitých pojmů a vztahů

- **Úvěr (půjčka)** je dočasné zapůjčení peněžních prostředků věřitelem (bankou) dlužníkovi (fyzická osoba, firma), který za tuto půjčku zaplatí dlužníkovi úrok ve stanovených termínech.
- **Úmor dluhu** je ta část splátky úvěru (dluhu), která snižuje dlužnou částku.
  Splátka se tedy skládá z úmoru dluhu a úhrady úroku.
- **Umořovací plán** je tabulka obsahující údaje o výši splátky, výši úmoru, výši úroku a stavu dluhu na konci každého úrokovacího období.
- **Anuitní splátka (anuita)** je splátka konstantní hodnoty placená v pravidelných intervalech (obvykle na konci každého úrokového období).

  Pro výpočet výše anuity platí vzorec $$s = \frac{V \cdot \left(1+\frac{i \cdot t}{360}\right)^n \cdot \frac{i \cdot t}{360}}{\left(1+\frac{i \cdot t}{360}\right)^n - 1} \ ,$$

  čili, označíme-li $q = 1+\frac{i \cdot t}{360}$, $$s = \frac{V \cdot q^n \cdot \ q-1}{q^n - 1} = \frac{V \cdot \ q-1}{1-q^{-n}} \ .$$

  Ve vzorcích je V výše úvěru, i roční úroková míra, t délka úrokovacího období ve dnech, n počet anuit (tedy úrokovacích období).

- **Hypotéka (hypoteční úvěr)** je dlouhodobý účelový úvěr, který poskytuje banka občanům k financování investic do nemovitostí (koupě a rekonstrukce bytů, domů, pozemků apod.).
- **Americká hypotéka** je neúčelový úvěr, který je jištěn nemovitostí. Úroková sazba bývá o něco vyšší než u hypotečního úvěru, ale nižší než u spotřebitelského úvěru.
- **Leasing** je forma pronájmu různých zařízení, který poskytují leasingové společnosti.
- **Finanční leasing** končí převodem vlastnictví zařízení na nájemce.
  Zůstatková hodnota je cena, za kterou odkoupí nájemce zařízení po ukončení finančního leasingu do svého vlastnictví.
- **Operativní leasing** je forma leasingu, po jehož ukončení vrací nájemce pronajaté zařízení zpět leasingové společnosti.
- **Akontace** je první splátka hrazená hned po sepsání smlouvy o leasingu (nebo prodeji na splátky). Udává se v procentech prodejní ceny.
- **Skonto** je sleva, kterou poskytuje prodávající kupujícímu v případě, že kupující zaplatí za zboží okamžitě po jeho dodání (nebo během krátké dohodnuté doby, která je kratší, než normální doba splatnosti bez slevy).

Úlohy 2

K řešení úloh je vhodné užít přiložený program ***A_Uvery_anuity.nb*** *, popis viz kapitola 5.*

Příklad 2.1 (řešený)

Odvoďte vzorec pro výši anuitní splátky uvedený v přehledu na začátku kapitoly 2.

Řešení:

Předpokládejme výši úvěru V, úrok. sazbu i p.a., délku úrokovacího období t (dnů), počet anuit (tedy počet úrok. období, během kterých se úvěr splatí) n, splátka se provádí vždy na konci úrokovacího období.
Vyjádříme výši dluhu na koncích jednotlivých úrokovacích období (po zaplacení splátky za dané období).

Na konci prvního období činí dluh bance:

$D_1 = V \cdot q - s$, kde $q = 1 + \dfrac{i \cdot t}{360}$.

Na konci druhého období činí dluh bance:

$D_2 = D_1 \cdot q - s = (V \cdot q - s) \cdot q - s = Vq^2 - sq - s$.

Na konci třetího období činí dluh bance:

$D_3 = D_2 \cdot q - s = (Vq^2 - sq - s) \cdot q - s = Vq^3 - sq^2 - sq - s = Vq^3 - s \cdot (q^2 + q + 1)$.

.

.

Na konci n –tého období činí dluh bance:

$D_n = V \cdot q^n - s \cdot (q^{n-1} + q^{n-2} + q^{n-2} + ... + q + 1)$.

Výraz v závorce je součtem n členů geometrické posloupnosti s prvním členem 1 a kvocientem q, tudíž

$$D_n = Vq^n - s \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1} .$$

Po n úrok. obdobích (splátkách) je dluh bance splacen, tedy $D_n = 0$, a z výše uvedené rovnice dostaneme pro výši splátky (anuity) $s = \dfrac{V \cdot q^n \cdot (q-1)}{q^n - 1} = \dfrac{V \cdot (q-1)}{1 - q^{-n}}$.

Příklad 2.2

Podnikatel získal u banky úvěr ve výši 800 000 Kč, který má splatit šesti anuitními měsíčními splátkami, vždy na konci měsíčního úrokovacího období. Úroková míra je 15 % p.a.

a) Určete výši anuity.

b) Sestavte šestiměsíční umořovací plán, uveďte celkovou částku zaplacenou bance a celkový úrok.

Příklad 2.3

Firma získala od banky na začátku roku 2009 úvěr ve výši 1,4 milionu Kč se splatností 2 roky. Úrokovací období je půl roku, úroková míra je 16 % p.a. Podle smlouvy s bankou splatí firma úvěr ve čtyřech pololetních splátkách, vždy na konci úrokovacího období. První tři splátky budou ve výši 400 000 Kč.

a) Určete výši poslední splátky.
b) Sestavte umořovací plán pro roky 2009 a 2010, uveďte celkovou částku zaplacenou bance a celkový úrok.

Příklad 2.4

Výrobní podnik získal od banky na začátku roku úvěr ve výši 2 500 000 Kč, který bude splácen splátkami ve výši 900 000 Kč, vždy na konci roku (poslední splátka může být nižší). Úrokovací období je jeden rok, úroková míra je 14 %.

a) Sestavte umořovací plán.
b) Určete dobu, po kterou bude úvěr splácen.
c) Určete výši poslední splátky.
d) Určete celkový úrok zaplacený bance.

*Příklad 2.5 (řešený)

Počátkem prvního úrokovacího období o délce t dnů získáme úvěr ve výši V Kč. Ten bude splácen splátkami v dohodnuté výši s Kč vždy na konci úrokovacího období (poslední splátka může být nižší). Úroková míra je i p.a. (desetinným číslem).

a) Určete výši dluhu na konci každého úrokovacího období.
b) Určete dobu splácení úvěru (t.j. počet úrokovacích období, po něž je úvěr splácen).
c) Určete výši poslední splátky s´.
d) Určete výši úroku a úmoru v jednotlivých úrokovacích obdobích.

Poznámka: Program ***A_Fix_splatky_uveru.nb*** *řeší tuto úlohu pro konkrétní hodnoty V, s, t, i včetně vygenerování umořovacího plánu.*

Řešení:

a) Označme $q = 1 + \dfrac{i \cdot t}{360}$ a stejně jako při řešení příkladu 2.1 získáváme pro výši dluhu na konci n – tého úrokovacího období $D_n = Vq^n - s \cdot \dfrac{q^n - 1}{q - 1}$.

b) V okamžiku úplného splacení dluhu musí platit $D_n = 0$, řešíme tedy rovnici

$$Vq^n - s \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1} = 0 \ .$$

Zaveďme substituci $x = q^n$, rovnice pak má tvar $V \cdot x - s \cdot \dfrac{x-1}{q-1} = 0$, což je lineární rovnice vzhledem k x.

Po úpravách dostaneme $x \cdot \left[s - V \cdot \ q - 1 \ \right] = s$, přičemž musí platit $s - V \cdot \ q - 1 \ > 0$.

Poslední podmínka vyjadřuje skutečnost, že splátka musí mít hodnotu vyšší, než je úrok za první úrokovací období ; v opačném případě by nemohlo dojít k umořování dluhu.

Z poslední rovnice vyjádříme x a dosadíme zpět $x = q^n$, tak získáme rovnici

$$q^n = \frac{s}{s - V \cdot (q-1)} \;,$$

kterou logaritmujeme (q > 1) a máme

$$n \cdot \log q = \log \frac{s}{s - V \cdot \;\; q - 1}$$

a po vydělení kladným číslem log q a úpravě máme konečně

$$n = \frac{\log s - \log\left[s - V \cdot \;\; q - 1 \;\right]}{\log q} \quad .$$

Z této rovnice však n obvykle nevyjde celé, proto definujme číslo n_0 jako celou část čísla n ; číslo n_0 pak určuje počet úrokovacích období, ve kterých má splátka hodnotu s, v posledním, $n_0 + 1$ – ním ú.o. má splátka s´ hodnotu splňující podmínku $0 \le s' < s$.

Celková doba splácení úvěru je tedy $n_0 + 1$ úrokovacích období.

c) Dluh na konci n_0 – tého úrokovacího období je

$$D_{n_0} = Vq^{n_0} - s \cdot \frac{q^{n_0} - 1}{q - 1} \;,$$

splátka zaplacená v posledním $n_0 + 1$ – ním ú.o. je tedy

$$s' = D_{n_0} \cdot q = Vq^{n_0+1} - s \cdot q \cdot \frac{q^{n_0} - 1}{q - 1} \qquad .$$

d) Úrok za n –té úrokovací období se počítá z dluhu na konci předchozího období, proto je

$$U_n = D_{n-1} \cdot (q-1), \quad n = 1, 2, 3, \ldots\ldots n_0 + 1 \;; \; D_0 = V \;.$$

Úmor za n – té úrokovací období je

$$U'_n = s - U_n \quad \text{pro} \quad n = 1, 2, 3, \ldots\ldots n_0$$

a v posledním $n_0 + 1$ – ním období je roven zbytku dluhu na konci n_0 – tého období, tedy

$$U'_{n_0+1} = D_{n_0} \;.$$

*Příklad 2.6

Pan Krejčí využil možnosti čerpat úvěr ze stavebního spoření a půjčil si od banky částku 70 000 Kč. Úroková míra mu byla stanovena na 4,8 % a měsíční splátka na 4000 Kč. Úrokovací období je jeden měsíc, úvěr byl poskytnut 1.10.2011, splátku hradí pan Krejčí vždy poslední den v měsíci.

a) V kterém měsíci kterého roku bude úvěr splacen?

b) Kolik zaplatí pan Krejčí celkově bance na úrocích?

c) Kolik Kč činí poslední splátka?

Návod: Použijte vzorce odvozené v př. 2.5, k řešení můžete též využít program
A_Fix_splatky_uveru.nb .

*Příklad 2.7

Experimentujte s programem ***A_Fix_splatky_uveru.nb*** tak, že zvolíte konstantní hodnotu úvěru a

a) zjišťujete závislost doby splácení a celkového úroku na výši splátky, úrok. míra a délka úr. období je konstantní,

b) zjišťujete závislost doby splácení a celkového úroku na úrok. míře, výše splátky a délka úr. období je konstantní,

c) zjišťujete závislost doby splácení a celkového úroku na délce úr. období, úrok. míra a výše splátky je konstantní.

Poznámka: Ve výsledcích jsou pro názornost graficky znázorněny jen závislosti délky splácení n na s, i, t pro jisté zvolené hodnoty ostatních konstantních parametrů.

Příklad 2.8

Manželé Novákovi si zřídili na začátku roku u banky hypoteční úvěr ve výši 400 000 Kč na rekonstrukci bytu. Úvěr budou splácet ročními anuitami, vždy na konci roku, úrokovací období je jeden rok, úroková míra je 6 %.
Vypočtěte výši anuitní splátky a celkový zaplacený úrok, jestliže se má úvěr splatit za
a) 2 roky,
b) 3 roky,
c) 5 let,
d) 10 let.

*Příklad 2.9 (řešený)

V bance získáme úvěr ve výši 1 milion Kč. Úrokovací období je jeden rok, úvěr je splácen ročními anuitami na konci každého roku. Zjistěme výšku anuity s a celkový úrok u zaplacený bance v závislosti na počtu anuit (počtu let splácení) n (n = 1,2,3,....20) za předpokladu, že roční úroková míra je
a) 6 %
b) 18 % .
Dále zjistěme s a u pro (hypotetickou) hodnotu n = 100 a hodnoty, ke kterým se s a u blíží, jestliže $n \to \infty$. Sestrojme grafy závislostí s(n) a u(n) pro oba případy a) a b).

Řešení:
Při výpočtu hodnot s a n použijeme vztahy

$$s = \frac{V \cdot\ q-1}{1-q^{-n}} \quad \text{a} \quad u = n \cdot s - V,$$

kde V = 1 000 000 Kč, q = 1,06 v případě a) a q = 1,18 v případě b).

*Výpočet je výhodné provést pomocí programu **A_Uvery_anuity.nb** nebo vytvořením tabulky v Excelu:*

Úroková míra i = 6 %			Úroková míra i = 18 %		
n	s	u	n	s	u
1	1060000,00	60000,00	1	1180000,00	180000,00
2	545436,89	90873,79	2	638715,60	277431,19
3	374109,81	122329,44	3	459923,86	379771,58
4	288591,49	154365,97	4	371738,67	486954,68
5	237396,40	186982,00	5	319777,84	598889,21
6	203362,63	220175,77	6	285910,13	715460,78
7	179135,02	253945,13	7	262362,00	836534,00
8	161035,94	288287,54	8	245244,36	961954,87
9	147022,24	323200,12	9	232394,82	1091553,42
10	135867,96	358679,58	10	222514,64	1225146,41
11	126792,94	394722,32	11	214776,39	1362540,25
12	119277,03	431324,35	12	208627,81	1503533,71
13	112960,11	468481,37	13	203686,21	1647920,70
14	107584,91	506188,73	14	199678,06	1795492,82
15	102962,76	544441,46	15	196402,78	1946041,74
16	98952,14	583234,30	16	193710,08	2099361,34
17	95444,80	622561,67	17	191485,27	2255249,61
18	92356,54	662417,73	18	189639,46	2413510,23
19	89620,86	702796,35	19	188102,84	2573953,94
20	87184,56	743691,14	20	186819,98	2736399,62
100	60177,36	5017735,63	100	180000,01	17000001,17

Z tabulky vidíme, že s rostoucím n se výše anuity s snižuje, pro velká n se však shora přibližuje kladnému číslu s_∞ , které hodnoty s omezuje zdola.
Platí

$$s_\infty = \lim_{n\to\infty} s(n) = \lim_{n\to\infty} \frac{V\cdot\ q-1}{1-\frac{1}{q^n}} = V\cdot(q-1)\ ,$$ neboť $q > 1$.

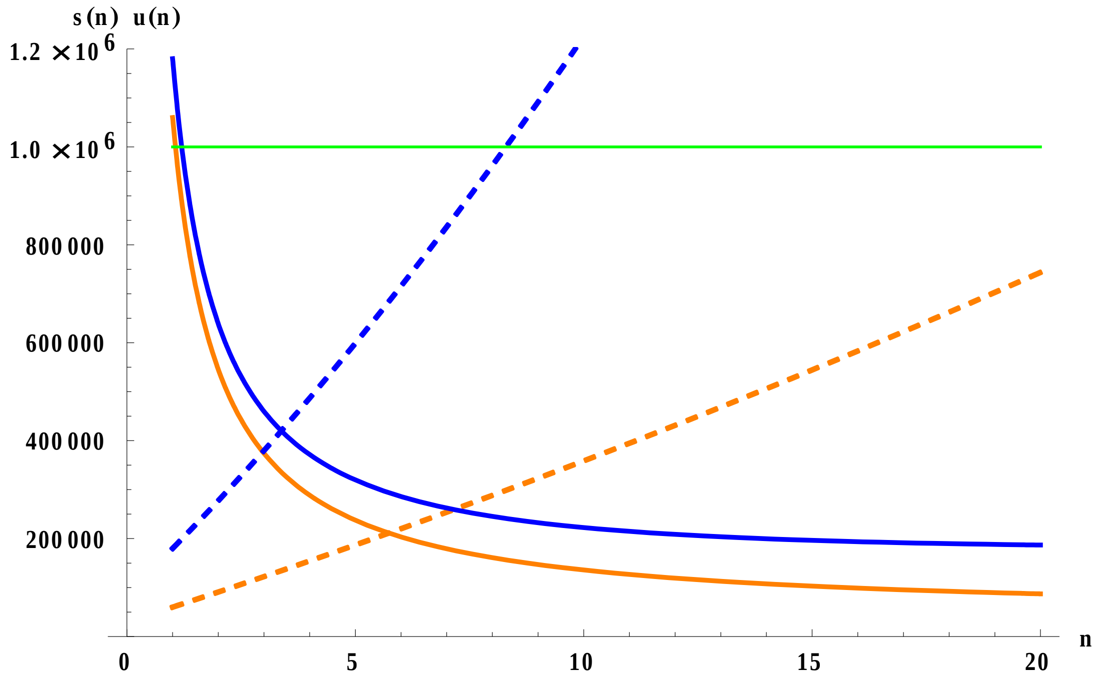
Pro i = 0,06 je tedy s_∞ = 1 000 000 · 0,06 = 60 000 Kč,
pro i = 0,18 je s_∞ = 1 000 000 · 0,18 = 180 000 Kč.
Pod tyto hodnoty nemohou roční anuity klesnout.

Pokud jde o celkový úrok u, rostou jeho hodnoty s rostoucím n bez omezení, o čemž se přesvědčíme výpočtem limity

$$u_\infty = \lim_{n\to\infty} u(n) = \lim_{n\to\infty}\left[n\cdot\frac{V\cdot\ q-1}{1-\frac{1}{q^n}} - V \right] = +\infty$$ pro jakékoli $q > 1$.

Nyní chápeme, proč mají banky zájem na co nejdelší době splácení poskytnutého úvěru (hypotéky) a většinou neumožňují předčasné splacení zbytku dluhu; všimněme si například, že při úrokové míře 18 % je úrok již po 9 letech splácení vyšší než úvěr!

Názorné vyjádření závislostí s(n) a u(n) na n vyjadřuje následující graf:



Legenda: s(n) - plné čáry (i = 6 % - oranžová, i = 18 % - modrá)
u(n) - čárkovaně (i = 6 % - oranžová, i = 18 % - modrá)
výše úvěru V - zelená plná

Příklad 2.10

Pan Kolář chce získat účelový úvěr na modernizaci bytového jádra. Úvěr je schopen splácet měsíčními anuitními splátkami do výše 1000 Kč po dobu pěti let. Banka nabízí stálou úrokovou míru 13 % p.a., úvěr poskytuje v tisícikorunách.

a) Jaký nejvyšší úvěr může banka panu Kolářovi poskytnout?
b) Jaká bude pak skutečná výše splátek?

*Příklad 2.11

Banka nabízí občanům neúčelový úvěr ve výši 40 000 Kč s měsíční anuitou 1000 Kč a dobou splatnosti 5 let. Určete odpovídající úrokovou sazbu na desetiny procenta.
*(Použijte program **A_Uvery_anuity.nb** nebo jiný matematický software, který je schopen vzniklou rovnici vyřešit. V případě "ručního" výpočtu musíte zkusmo určovat anuity pro různé hodnoty úrokové sazby.)*

"Matematika versus životní realita"

Následující úlohy - na rozdíl od zjednodušených předešlých - zahrnují i skutečnosti, které obvykle peněžní ústavy v reklamách na své produkty velkými písmeny neuvádějí.
Jde o další položky, které hradí klient bance, zejména *částky za schválení úvěru, za vedení účtu u této banky, za odhad tržní hodnoty nemovitosti, kterou klient ručí, a pojištění této nemovitosti.*
Díky těmto položkám skutečné náklady na úvěr narůstají nad rámec nákladů určených samotnými úroky z úvěru.

Příklad 2.12 (řešený)

Manželé Novákovi potřebují k dofinancování koupě nového třípokojového bytu v ceně 2 100 000 Kč částku 1 550 000 Kč. Tu hodlají získat pomocí hypotečního úvěru. Banka BA tento úvěr nabízí s roční úrokovou sazbou 4,7 %, dobou splatnosti 25 let a měsíčními splátkami.
Určete
a) výši měsíční anuitní splátky,
b) náklady na úvěr (celkový úrok zaplacený bance).

Řešení:

Ze vzorce pro anuitní splátku s získáme po dosazení V = 1 550 000, i = 0,047, t = 30, n = 300:
s = 8 792 Kč.
Za 300 měsíců tak činí splátky celkem 8 792 · 300 = 2 637 600 Kč a celkový úrok je
u =2 637 600 – 1 550 000 = 1 087 600 Kč.

Před podpisem smlouvy o úvěru je však manželům Novákovým sděleno, že *nad rámec úroků musí uhradit bance BA následující poplatky:*

- 0,8 % z výše úvěru za schválení účtu (tedy 0,008 · 1 550 000 = 12 400 Kč),
- 130 Kč měsíčně za vedení účtu u banky BA (tedy za 25 let 130 · 300 = 39 000 Kč) ,
- 1 800 Kč ročně za pojištění bytu (celkově tedy 1 800 · 25 = 45 000 Kč),
- 2 500 Kč za odhad tržní (budoucí) hodnoty bytu.

Skutečné celkové náklady na úvěr budou tedy o 12 400 + 39 000 + 45 000 + 2 500 = 98 900 Kč vyšší, než původně Novákovi očekávali, a budou s úroky činit 1 087 600 + 98 900 = 1 186 500 Kč.

Příklad 2.13

Pan Karásek potřebuje získat prostřednictvím hypotečního úvěru částku 2 500 000 Kč na stavbu rodinného domu. Banka BB nabízí roční úrokovou míru 4,8 % a doby splatnosti
a) 10 let,
b) 20 let,
c) 30 let.
Dále musí pan Karásek uhradit následující poplatky:
- 150 Kč měsíčně za vedení účtu u banky BB,
- 0,75 % z úvěru za jeho schválení,
- 4 800 Kč za odhad tržní ceny domu,
- 4 200 Kč ročně za pojištění domu.

Vypočtěte měsíční anuitu s, celkový úrok u, podíl p úroku u a výše úvěru V a celkové náklady N na úvěr pro jednotlivé doby splatnosti a), b), c).
Proveďte porovnání těchto variant z hlediska výhodnosti pro pana Karáska a pro banku BB.

Příklad 2.14

S využitím přiloženého programu ***A_Uvery_anuity.nb*** porovnávejte hodnoty poměru $p = \frac{u}{V}$,

kde u je celkový úrok a V výše úvěru. Zvolte V = 1 000 000 Kč, i = 0,06, t = 30 dní a zjistěte závislost p na počtu úrok. období. Výsledky zapište do následující tabulky.

n (měsíců)	doba splácení (let)	u (Kč)	p = u/v	p %
12	1			
24	2			
36	3			
48	4			
60	5			
120	10			
180	15			
240	20			
300	25			
360	30			

Sledujte grafické znázornění úroku a úmoru a rychlost poklesu dlužné jistiny na grafu, který generuje program, a odpovídající umořovací plány v závislosti na n.
Ze získaných hodnot vyvoďte závěry z hlediska výhodnosti úvěru pro klienta banky.

Příklad 2.15

Manželé Sovovi si potřebují půjčit na pořízení staršího automobilu a dovybavení bytu částku 800 000 Kč. Banka BC jim nabízí americkou hypotéku s roční úrokovou sazbou 7,1 %, dobou splatnosti 15 let a měsíčními splátkami. Poplatek za schválení úvěru je 0,85 % vypůjčené částky, poplatek za vedení účtu v bance BC je 100 Kč měsíčně, za odhad tržní ceny bytu musí Sovovi zaplatit 1800 Kč, pojištění bytu mají vlastní.
Určete
a) výšku měsíční anuitní splátky,
b) celkový úrok zaplacený bance,
c) skutečné celkové náklady hypotéky.

Leasing

Příklad 2.16

Soukromý zemědělec pan Jiráček chce získat stroj o pořizovací ceně 1 500 000 Kč formou finančního leasingu. Leasingová společnost nabízí akontace ve výši 20 %, 40 %, 60 %, 80 % a dobu splácení 24, 36 a 48 měsíců. Následující tabulka poskytuje podklady pro výpočet výšky měsíční splátky pro všechny nabízené varianty:

Akontace %	Měsíční splátka v % z ceny stroje		
	24 měsíců	36 měsíců	48 měsíců
20	3,917	2,813	2,267
40	2,938	2,109	1,701
60	1,959	1,406	1,134
80	0,979	0,703	0,567

Zůstatková hodnota je ve všech případech 600 Kč, poplatek při podpisu nájemní smlouvy je 1,3 % pořizovací ceny stroje.

Vypočtěte

a) Výši jedné měsíční splátky pro všechny varianty uvedené v tabulce.

b) Součet měsíčních splátek pro všechny varianty uvedené v tabulce.

c) Celkovou částku, kterou zaplatí nájemce leasingové společnosti (včetně zůstatkové hodnoty a poplatku) pro všechny varianty uvedené v tabulce.

d) Zisk leasingové společnosti pro všechny varianty uvedené v tabulce.

Výsledky z a), b), c) a d) uspořádejte do tabulek podobných tabulce uvedené v zadání.

Výsledky z a) a b) znázorněte pomocí sloupcových diagramů (viz výsledky).

Poznámka: Úlohu 2.16. řeší přiložený program **Leasing 2.16.xlsx** .
Tento program lze užít i pro řešení úloh obdobného zadání, pokud změníme údaje ve vstupních buňkách.

Příklad 2.17

Pořizovací cena nákladního automobilu je 2 400 000 Kč. Při volbě akontace 50 % a době splácení 42 měsíců činí měsíční splátka finančního leasingu 40 585 Kč.

Jak vysoká je roční úroková míra tohoto leasingu?

(Předpokládejte nulovou zůstatkovou hodnotu. Užijte program ***A_Uvery_anuity.nb***.)

Splácení úvěru nestejnými splátkami při konstantním úmoru

Příklad 2.18 (řešený)

a) Částka 36 000 Kč má být splacena dvanácti nestejnými splátkami s konstantním úmorem. Splátky jsou placeny vždy na konci měsíčního úrokovacího období, úroková míra je 18 % p.a. Sestavte umořovací plán splátek a určete celkovou částku zaplacenou na úrocích.

b) Řešte stejnou úlohu za předpokladu konstantních anuitních splátek.

c) Porovnejte výsledky částí a) a b) z hlediska výhodnosti pro klienta (dlužníka).

Řešení:

a) Splátka na konci každého měsíce se skládá z konstantního úmoru ve výši 36 000 : 12 = 3 000 Kč a z proměnlivého úroku za daný měsíc. Úroky jsou:

Za 1. měsíc .... $36000 \cdot \frac{0{,}18}{12} = 540$ Kč,

základ pro výpočet úroku se v každém dalším měsíci sníží o zaplacený úmor 3 000 Kč, tedy úrok je

za 2. měsíc .... $33000 \cdot \frac{0{,}18}{12} = 495$ Kč,

za 3. měsíc .... $30000 \cdot \frac{0{,}18}{12} = 450$ Kč,

.

.

za 12. měsíc .... $3000 \cdot \frac{0{,}18}{12} = 45$ Kč.

Jak je zřejmé, úroky tvoří *aritmetickou posloupnost* s prvním členem 540 a diferencí -45 (i měsíční splátky tvoří aritmetickou posloupnost se stejnou diferencí a prvním členem 3540), pro celkový úrok U lze tedy použít vzorec pro součet členů aritm. posloupnosti:

$$U = \frac{12}{2} \cdot \; 540 + 45 \; = 3510 \text{ Kč.}$$

Umořovací plán:

Měsíc	**Úmor**	**Úrok**	**Splátka**	**Dlužná částka** po zaplacení splátky
1.	3000	540	3540	33000
2.	3000	495	3495	30000
3.	3000	450	3450	27000
4.	3000	405	3405	24000
5.	3000	360	3360	21000
6.	3000	315	3315	18000
7.	3000	270	3270	15000
8.	3000	225	3225	12000
9.	3000	180	3180	9000
10.	3000	135	3135	6000
11.	3000	90	3090	3000
12.	3000	45	3045	0
Celkem		3510		

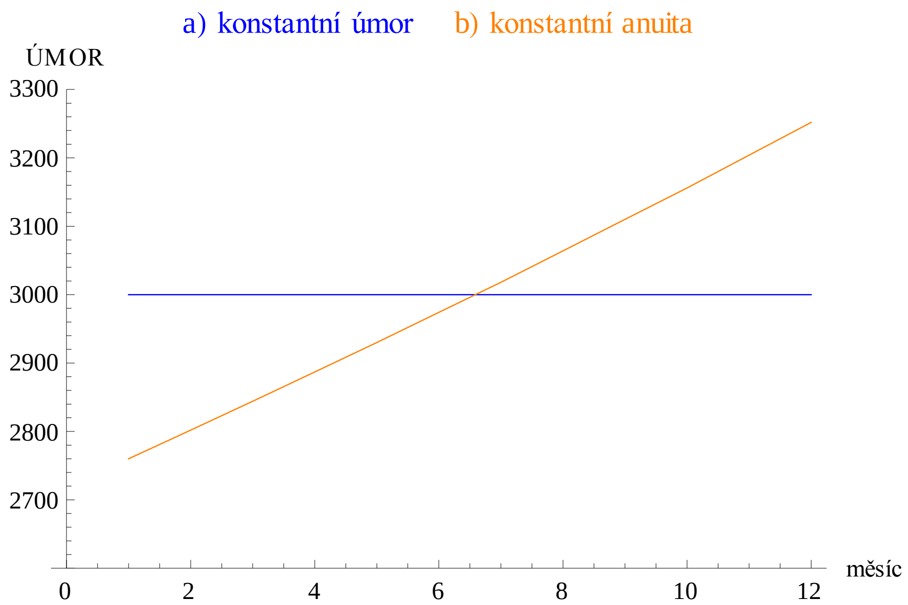
b) Výši anuity spočteme pomocí vzorce

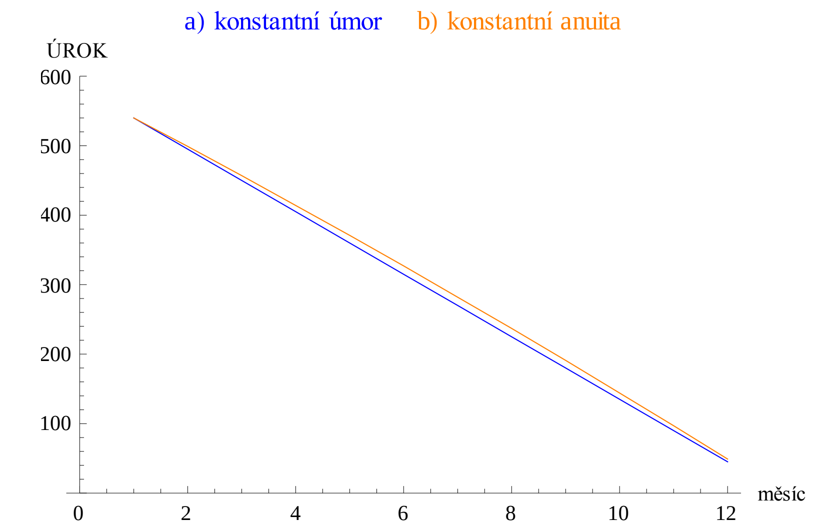
$$s=\frac{V\cdot\left(1+\frac{i\cdot t}{360}\right)^n\cdot\frac{i\cdot t}{360}}{\left(1+\frac{i\cdot t}{360}\right)^n-1}=\frac{36000\cdot 1{,}015^{12}\cdot 0{,}015}{1{,}015^{12}-1}=3300{,}5\ \text{Kč}.$$

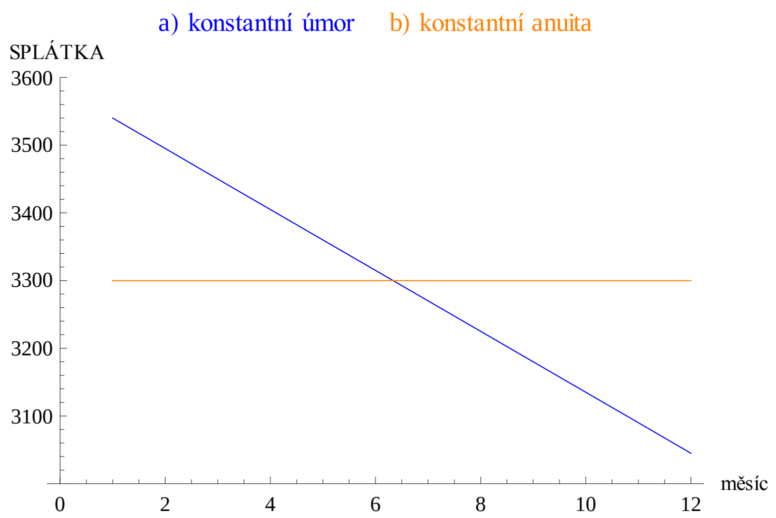
Umořovací plán (jednotlivé položky jsou zaokrouhleny na Kč, tudíž součty přesně neodpovídají):

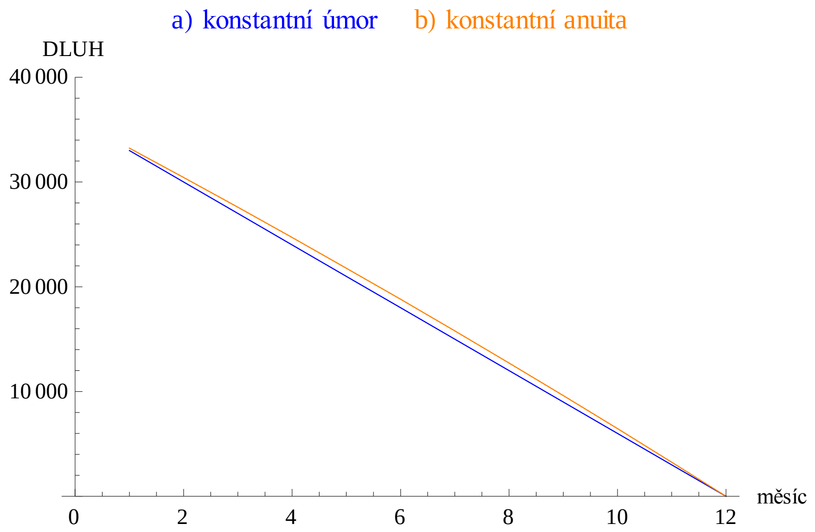
Měsíc	**Úmor**	**Úrok**	**Splátka**	**Dlužná částka** po zaplacení splátky
1.	2760	540	3300	33240
2.	2802	499	3300	30438
3.	2844	457	3300	27594
4.	2887	414	3300	24707
5.	2930	371	3300	21777
6.	2974	327	3300	18803
7.	3018	282	3300	15785
8.	3064	237	3300	12721
9.	3110	191	3300	9612
10.	3156	144	3300	6455
11.	3204	97	3300	3252
12.	3252	49	3300	0
Celkem		3608		

Pro větší názornost uvádím grafické srovnání hodnot jednotlivých položek z tabulky pro oba případy a) a b).









Z uvedených tabulek i grafů vyplývá, že pro dlužníka je výhodnější varianta a) s konstantním úmorem. Při variantě b) je totiž po celé období splácení úvěru dlužná částka (a tudíž i úrok) vyšší než u varianty a).

Celkový zaplacený úrok je u varianty b) o 3608 – 3510 = 98 Kč vyšší než u varianty a).

Příklad 2.19

Pan Oulík získal od banky počátkem roku úvěr ve výši 160 000 Kč, který má podle smlouvy splatit osmi pravidelnými splátkami s konstantním úmorem, vždy na konci pololetí, úrokovací období je půl roku, úroková míra je 12 % p.a.

Sestavte umořovací plán splátek a určete celkový úrok, který musí pan Oulík zaplatit bance.

[Řešení viz úloha 2.18 varianta a).]

Skonto

Příklad 2.20 (řešený)

Prodejní firma AB dodala zákazníkovi Z kancelářské vybavení v celkové prodejní ceně 450 000 Kč.

Zákazník Z může dodané zboží uhradit dvěma způsoby:

a) v plné prodejní ceně v termínu do 3 týdnů od data dodání,

b) se skontem (slevou) ve výši 1,5 % prodejní ceny, pokud bude platba provedena ihned po dodání.

Zákazník Z nemá volné fin. prostředky k okamžité platbě, v případě využití skonta by si musel vzít krátkodobý úvěr s úrok. sazbou 14 % p.a. (úročí se v okamžiku jednorázového splacení úvěru).

Je pro zákazníka Z za těchto podmínek výhodné využít skonta?

Řešení:

Skonto má hodnotu $S = 450000 \cdot \frac{1,5}{100} = 6750$ Kč.

Zákazník by tedy musel ihned uhradit sníženou cenu ve výši 450 000 – 6 750 = 443 250 Kč.

Ve stejné výši si musí vzít úvěr.

Úrok z úvěru za 3 týdny je pak $U = 443250 \cdot \frac{14}{100} \cdot \frac{21}{360} = 3620$ Kč.

Jelikož S > U, je výhodné využít skonto, zákazník K tak získá částku S – U = 3 130 Kč.

Příklad 2.21

Výrobní firma CD dodala školskému zařízení S počítačové vybavení s prodejní cenou 170 000 Kč.

Možnosti zaplacení zboží jsou následující:

a) zaplacení celé prodejní ceny v termínu do 4 týdnů,

b) zaplacení ceny snížené o skonto v hodnotě 2,5 % prodejní ceny ihned po dodání.

Zařízení S má dost finančních prostředků pro okamžitou platbu, ty jsou uloženy na účtu s úrokovou mírou 2 %.

Vyplatí se zařízení S využít skonto?

[Viz př. 2.20 s tím, že nyní protihodnotou za využití skonta je ušlý zisk z čistého úroku na účtu.]

3 SPOŘENÍ

Přehled užitých pojmů a vztahů

- **Spořící účet (vkladový účet, bankovní konto)** je účet, který slouží k ukládání (vybírání) peněžních prostředků v libovolných částkách a termínech. Tento účet může být zřízen i s výpovědní lhůtou, popř. s revolvingem. Daň z úroku je 15 %.
- **Stavební spoření** je spoření podporované státem prostřednictvím tkzv. státního příspěvku. Každý účastník má nárok na poskytnutí úvěru v limitované výši za relativně výhodných podmínek, ten lze čerpat účelově na financování potřeb spojených s bydlením.
- **Renta (důchod)** je pravidelná platba stejné hodnoty.
- **Rentový účet** je spořící účet, ze kterého se jeho majiteli vyplácí renta.
- **Výše naspořené částky** při pravidelných vkladech:

  a) Částka K_0 se ukládá *na začátku* každého úrokovacího období (jde o tkzv. *předlhůtní* spoření), roční úroková míra je i, zdaňovací koeficient k, úrokovací období je t dní. Pak na konci n- tého úrokovacího období je na kontě částka

  $$K_n = K_0 \cdot q \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1} \quad \text{, kde} \quad q = 1 + k \cdot i \cdot \frac{t}{360} \quad .$$

  b) Částka K_0 se ukládá *na konci* každého úrokovacího období (jde o tkzv. *polhůtní* spoření), roční úroková míra je i, zdaňovací koeficient k, úrokovací období je t dní. Pak na konci n- tého úrokovacího období je na kontě částka

  $$K_n = K_0 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1} \quad , \quad \text{kde} \quad q = 1 + k \cdot i \cdot \frac{t}{360} \quad .$$

  Tento vzorec lze užít i pro zobecněnou situaci, kdy je během úrok. období ukládáno víckrát. K_0 pak označuje celkovou částku naspořenou během úrok. období + úrok z této částky na konci úrokovacího období. (K_0 musí být ve všech n úrokovacích obdobích stejné.)

Úlohy 3

Příklad 3.1

Paní Rubášová ukládala na nový spořící účet počátkem každého měsíce částku 4 000 Kč, poprvé 1.1.2009, z účtu nebyly prováděny žádné výběry. Úročí se vždy na konci kalendářního měsíce, úroková míra je 2,4 % p.a. Určete kapitál na účtu paní Rubášové

a) na konci dubna 2009,

b) na konci prosince 2009.

Příklad 3.2 (řešený)

Odvoďte vzorce pro výši naspořené částky při pravidelných vkladech uvedené v přehledu na začátku této kapitoly s využitím poznatků o geometrické posloupnosti.

Řešení:

a) Předpokládáme, že částka K_0 se ukládá ***na začátku*** každého úrokovacího období, roční úroková míra je i, zdaňovací koeficient k, úrokovací období je t dní.

Označme $q = 1 + k \cdot i \cdot \frac{t}{360}$, pak je kapitál na účtě na konci

1. úrok. období $K_1 = K_0 \cdot q$, (nyní uložíme K_0, stejně tak na konci každého dalšího období)

2. úrok. období $K_2 = (K_1 + K_0) \cdot q = (K_0 q + K_0) \cdot q = K_0 q^2 + K_0 q = K_0 (q + q^2)$,

3. úrok. období $K_3 = (K_2 + K_0) \cdot q = [K_0 (q + q^2) + K_0] \cdot q = K_0 (q + q^2 + q^3)$,

4. úrok. období $K_4 = (K_3 + K_0) \cdot q = [K_0 (q + q^2 + q^3) + K_0] \cdot q = K_0 (q + q^2 + q^3 + q^4)$,

.

.

n -tého úrok. období $K_n = (K_{n-1} + K_0) \cdot q = K_0 (q + q^2 + ... + q^n) = K_0 q \cdot (1 + q + q^2 + ... + q^{n-1})$,

přičemž výraz v závorce je součet prvních n členů geometrické posloupnosti s prvním členem 1 a kvocientem q , takže platí

$$K_n = K_0 q \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1} = K_0 \cdot \left(1 + k \cdot i \cdot \frac{t}{360}\right) \cdot \frac{\left(1 + k \cdot i \cdot \frac{t}{360}\right)^n - 1}{k \cdot i \cdot \frac{t}{360}} .$$

b) Předpokládáme, že částka K_0 se ukládá ***na konci*** každého úrokovacího období, kapitál na účtě na konci n – tého úrokovacího období označme $K_n´$.

Místo výpočtů $K_1´$, $K_2´$, ... si uvědomíme, že vklad na konci úrokovacího období je z hlediska úročení ekvivalentní vkladu na počátku následujícího období, jen se nyní ještě na konci úr. období přiloží částka K_0 ,takže musí platit:

$K_1' = K_0$,

$K_2' = K_1 + K_0$,

$K_3' = K_2 + K_0$,

.

.

$$K_n' = K_{n-1} + K_0 = K_0 q \cdot \frac{q^{n-1}-1}{q-1} + K_0 = K_0 \cdot \left(\frac{q^n - q}{q-1} + 1 \right) = K_0 \cdot \frac{q^n - 1}{q-1} \quad ,$$

což je druhý dokazovaný vzorec.

Příklad 3.3

Pan Ondrášek si založil dne 17.4. bankovní konto a uložil na ně ihned 9 500 Kč. Dne 6.7. uložil na konto další částku ve výši 3 500 Kč a dne 20.10. částku 5 400 Kč. Úroková míra je 2,1 %, úrokovací období 1 rok (úročí se vždy na konci kalendářního roku). Pan Ondrášek žádné peníze během tohoto roku z konta nevybíral.

a) Kolik korun měl pan Ondrášek na kontě na konci kalendářního roku s připsaným zdaněným úrokem?

b) Kolik činil zdaněný úrok?

Příklad 3.4

Paní Bártová si založila u banky spořící účet na začátku roku 2010. Roční úroková míra je v průběhu tohoto roku stálá a činí 2,5 %. Vypočtěte částku, kterou bude mít na účtu paní Bártová na konci roku 2010, jestliže během roku nic nevybírá a

a) na začátku roku uloží jednorázově částku 12 000 Kč a pak již nic; úrokovací období je jeden rok, úročí se na konci roku,

b) na začátku každého měsíce uloží 1000 Kč, úrokovací období je jeden měsíc,

c) na konci každého měsíce uloží 1000 Kč, úrokovací období je jeden měsíc,

d) na začátku každého měsíce uloží 1000 Kč, úrokovací období je jeden rok, úročí se na konci roku,

e) na začátku každého čtvrtletí uloží 3 000 Kč, úrokovací období je jeden rok, úročí se na konci roku,

f) na začátku každého čtvrtletí uloží 3 000 Kč, úrokovací období je čtvrt roku, úročí se na konci čtvrtletí.

Poznámka: V částech d), e) užijte poznatky o aritmetických posloupnostech.

Příklad 3.5

Pan Král bude ukládat vždy na začátku roku 5000 Kč na vkladový účet. Stálá úroková míra činí 3,3 %, úrokovací období je 1 rok. Zjistěte, za kolik let přesáhne naspořená částka 50 000 Kč.

Příklad 3.6

Paní Křížová spořila na nově zřízené vkladní knížce na začátku každého měsíce roku 2007 částku 5000 Kč, úročilo se vždy na konci měsíce, úroková míra byla 2,6 % p.a. Na konci roku 2007 spoření ukončila a naspořenou částku včetně úroků převedla počátkem roku 2008 na spořící účet, kde ji ponechala bez dalších vkladů a výběrů další tři roky. Účet měl úrokovací období jeden rok (úročilo se na konci roku) a úrokovou míru 3,5 % p.a.

Zjistěte
a) kapitál na knížce na konci roku 2007,
b) kapitál na účtu na konci roku 2010.

Příklad 3.7 (řešený)

Paní Jarešová si spořila každého 10. v měsíci částku 5000 Kč na spořící účet se stálou úrokovou mírou 3 % p.a., první vklad byl proveden 10.4.2008. Úročilo se vždy na konci kalendářního měsíce. Jakou částku měla paní Jarešová na účtě koncem června roku 2011, jestliže po celou dobu spoření nebyly prováděny žádné výběry z účtu? Kolik činil čistý úrok za celé období spoření?

Řešení:

Pro řešení úlohy můžeme použít vzorec $K_n = K_0 \cdot \dfrac{q^n - 1}{q - 1}$ pro polhůtní spoření, což zdůvodníme následující úvahou.
V prvním úr. období (v dubnu 2008) byla uložena částka 5000 Kč a za období od 10.4. do konce měsíce, tedy za 20 dní, byl na konci měsíce připočten úrok ve výši
$5000 \cdot 0,03 \cdot \dfrac{20}{360} \cdot 0.85 = 7,08$ Kč.
Situace je rovnocenná uložení částky K_0 = 5007,08 Kč **na konci** měsíce dubna, ta se úročí v dalším měsíci.
Na konci druhého úr. období (května) jsme opět "uložili" 5007,08 Kč zahrnující vklad 5000 Kč a úrok z něj od 10.5. do konce května, který ještě není zahrnut v úrocích za květen počítaných ze základu na konci dubna. A stejně to proběhlo ve všech úrok. obdobích včetně posledního (tedy června 2011).
Nejprve vypočteme hodnotu kvocientu $q = 1 + 0,03 \cdot \dfrac{1}{12} \cdot 0.85 = 1,002125$.
Pak určíme výsledný kapitál na účtu za celkem n = 39 měsíčních úr. období :

$$K_{39} = 5007,08 \cdot \frac{1,002125^{39} - 1}{0,002125} = 203371 \text{ Kč} .$$

Čistý úrok byl 203 371 – 39 · 5000 = 203 371 – 195 000 = 8 371 Kč.

Na základě úvahy provedené výše můžeme formulovat ***obecné pravidlo***:

V případě, že pravidelný vklad provádíme ve stále stejné dny průběhu úrokovacího období, můžeme pro výpočet celkové naspořené částky použít vzorec pro polhůtní spoření
$K_n = K_0 \cdot \dfrac{q^n - 1}{q - 1}$ *, kde za K_0 dosadíme součet ukládaných částek a čistého úroku z nich ode dne vkladů do konce úrokovacího období.*
(Logickou podmínkou je, že interval mezi dvěma vklady je nejvýše roven délce úrok. období.)

*Příklad 3.8

Paní Kolářová spoří každý měsíc 800 Kč tím způsobem, že její zaměstnavatel tuto částku převádí vždy 15. daného měsíce na spořící účet v bance, úročení je prováděno vždy na konci čtvrtletí kalendářního roku. První vklad byl proveden 15. ledna 2010. Úroková míra je 2,8 %.

a) Jakou částku bude mít paní Kolářová na účtě na konci roku 2011?
b) Kdy přesáhne naspořená částka 30 000 Kč?
(Řešení viz úloha 3.7.)

Příklad 3.9 (řešený)

Na spořící účet ukládáme počátkem každého měsíce daného roku částku 2000 Kč. Úroková míra je 1,8 % p.a., úrokovací období 1 rok (úročí se na konci roku). Vypočtěte celkový (zdaněný) úrok za daný rok a částku, která je na účtě na konci roku za předpokladu, že na začátku roku byl stav na účtu nulový.

Řešení:

Jde o tkzv. *krátkodobé* (předlhůtní) spoření, kdy celková úrokovací doba je částí jednoho úrokovacího období.
Označme S = 2000 Kč, i = 0,018, k = 0,85, celkový úrok za rok je u, naspořená částka za rok včetně úroků je S_r. V průběhu roku používáme jednoduché úročení, protože úrok je připsán na účet až na konci roku. Úročený kapitál se však v jednotlivých měsících roku navyšuje:

První měsíc se úročí částka S, úrok za první měsíc je tedy $u_1 = S \cdot \frac{i}{12} \cdot k$,

druhý měsíc se úročí částka 2S, úrok za druhý měsíc je tedy $u_2 = 2S \cdot \frac{i}{12} \cdot k$,

$\vdots$ $\vdots$

poslední měsíc se úročí částka 12S, úrok za posl. měsíc je tedy $u_{12} = 12 \cdot S \cdot \frac{i}{12} \cdot k$.

(Úroky za jednotlivé měsíce tvoří aritmetickou posloupnost.)

Celkový úrok za rok je pak (s využitím vzorce pro součet členů arit.posloupnosti)

$$u = \frac{S \cdot i \cdot k}{12}\ 1+2+.....+12 \ = \frac{S \cdot i \cdot k}{12} \cdot 6 \cdot 13 = \frac{13}{2} \cdot S \cdot i \cdot k = 6,5 \cdot 2000 \cdot 0,018 \cdot 0,85 = 199 \text{ Kč}.$$

Celková naspořená částka je $S_r = 12 \cdot 2000 + 199 = 24199$ Kč.

Příklad 3.10

Zobecněním postupu řešení úlohy 3.9 odvoďte vzorec pro celkový úrok u a celkovou naspořenou částku S_r za rok, jestliže počátkem každé m-tiny roku ukládáme částku S Kč (m je přirozené číslo). Úrokovací období je jeden rok, roční úroková míra je i, zdaňovací koeficient k, úročí se na konci roku.

Příklad 3.11

Vypočtěte celkovou naspořenou částku a úrok za rok, jestliže ukládáme vždy počátkem čtvrtletí částku 6000 Kč, úrokovací období je jeden rok, úroková míra je 1,8 % p.a., úročí se na konci roku. Výsledek porovnejte s výsledkem úlohy 3.9.

Příklad 3.12

Jakou částku musíme ukládat počátkem každého měsíce daného roku, aby celková uspořená částka za rok včetně úroků byla 30 304 Kč? Úroková míra je 2,2 % p.a., úrokovací období je jeden rok, úročí se na konci roku.
(Použijte vzorec odvozený v úloze 3.10.)

Příklad 3.13

Při jaké roční úrokové míře bude při pravidelně ukládané částce 3000 Kč počátkem každého měsíce celkový úrok za rok roven 265 Kč?
(Použijte vzorec odvozený v úloze 3.10.)

Příklad 3.14 (řešený)

Vždy na začátku měsíce ukládáme částku 1500 Kč na spořící účet. Úroková míra je 2 %, úrokovací období 1 rok. Vypočtěte čistý úrok a celkovou naspořenou částku za 5 let při složeném úrokování.

Řešení:

Při řešení úlohy použijeme kombinaci krátkodobého spoření s jednoduchým úročením pro výpočet částky uspořené v průběhu jednoho kalendářního roku a složeného úročení pro výpočet naspořené částky za 5 úrokovacích období.
V souladu s řešením úlohy 3.9 a podle vzorce odvozeného v úloze 3.10 je celková částka uspořená za jeden kalendářní rok

$$S_r = S \cdot m \cdot \left(1 + \frac{i \cdot k \cdot \ m+1}{2m}\right) = 1500 \cdot 12 \cdot \left(1 + \frac{0{,}02 \cdot 0{,}85 \cdot 13}{24}\right) = 18166\ Kč.$$

Tuto částku vlastně ukládáme *na konci* každého roku na účet a dále úročíme složeným úročením podle vzorce pro polhůtní spoření $K_n = K_0 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$, kde $q = 1 + k \cdot i \cdot \frac{t}{360}$, $K_0 = S_r$, t = 360 .

Po dosazení $K_5 = 18166 \cdot \frac{1 + 0{,}85 \cdot 0{,}02 \ ^{5} - 1}{0{,}85 \cdot 0{,}02} = 93970\ \text{Kč}$.

Celkový úrok činí u = 93 970 - 5·12·1500 = 93 970 – 90 000 = 3 970 Kč .

*Příklad 3.15

Zobecněním postupu řešení úlohy 3.14 odvoďte vzorce pro celkovou naspořenou částku K_n a celkový úrok u_n za n let za těchto podmínek:
Vždy na začátku jedné m–tiny roku ($m \in N$) ukládáme částku S Kč, roční úroková míra je i, úrokovací období 1 rok (úročí se na konci roku), zdaňovací koeficient je k. Meziročně používáme složené úročení.

Příklad 3.16

Jakou částku musíme ukládat počátkem

a) každého měsíce,

b) každého čtvrtletí,

abychom při úrokové míře 3 % p.a. naspořili za 6 let 400 000 Kč? Úrokovací období je 1 rok.
(Užijte vzorec odvozený v úloze 3.15.)

Příklad 3.17

Kolik let je nutno spořit počátkem každého čtvrtletí 5000 Kč, aby naspořená částka při úrokové míře 2,3 % a ročním úrokovacím období přesáhla 80 000 Kč?
(Užijte vzorec odvozený v úloze 3.15.)

Poznámka: Při řešení úloh 3.9 až 3.17 (popř. kontrole jejich výsledků) lze využít přiložený program ***A_Spor_Kombin.nb*** .

Stavební spoření

Příklad 3.18 (řešený)

Pan Kolář si zřídil k 1.1.2011 stavební spoření s cílovou částkou 800 000 Kč. Z tarifů nabízených stavební spořitelnou si vybral variantu A (standard) která má tyto podmínky:

a) úroková sazba z vkladů je 2 % p.a.,

b) úroková sazba z úvěru je 4,8 % p.a.,

c) minimální procento naspoření je 40 % cílové částky,

d) minimální měsíční splátka úvěru je 0,6 % cílové částky.

Pan Kolář si dojednal měsíční vklad ve výši 5500 Kč s platností 5 let. Ten bude ale hradit jednorázově za rok, vždy k 1.1, poprvé 1.1.2010. Vklady se úročí jednou ročně, a to k 31.12. Státní příspěvek ve výši 1500 Kč za rok bude připisován k naspořené částce po celých 5 let, vždy k 1.1. Daň z úroků z naspořené částky je 15 %, úrok se počítá z celkové naspořené částky včetně státního příspěvku. (Zadání úlohy je vůči skutečnosti zjednodušeno).

Určete:

a) celkovou uspořenou částku na účtu k 1.1.2016 (kdy už se další vklad neprovádí),

b) maximální výši úvěru, o který může pan Kolář požádat,

c) minimální výši měsíční splátky úvěru,

*d) dobu splácení úvěru v měsících za předpokladu, že byla využita maximální výše úvěru a minimální výše měsíční splátky (předpokládejme platnost vzorce pro anuitu z úvodu kapitoly 2),

*e) celkový úrok z úvěru zaplacený bance.

Řešení:

a) Na začátku každého roku je panem Kolářem na účet vložena částka 5500 · 12 = 66 000 Kč a dále státní příspěvek ve výši 1500 Kč, tedy celkově 67 500 Kč. Při úrokové sazbě 2 % je pak za pět ročních úrokovacích období na účtu částka

$K_5 = 67500 \cdot q \cdot \frac{q^5 - 1}{q - 1}$, kde $q = 1 + 0{,}85 \cdot 0{,}02 \cdot \frac{360}{360} = 1{,}017$, tedy K_5 = 355 108 Kč .

Minimální procento naspoření ve výši 40 % cílové částky, tedy 320 000 Kč, bylo splněno.

b) Pan Kolář může požádat o úvěr ve výši rozdílu cílové částky a naspořené částky, tedy o 800 000 – 355 108 = 444 892 Kč.

c) Minimální výše měsíční splátky úvěru je 800 000 · 0,006 = 4 800 Kč.

d) Platí tedy s = 4800 Kč, V = 444 892 Kč, t = 30, i = 0,048 , n = ?

Předpokládáme platnost vzorce $s = \frac{V \cdot \ q - 1}{1 - q^{-n}}$, kde $q = 1 + \frac{i \cdot t}{360}$.

Ze vzorce postupně vyjádříme n :

$1 - q^{-n} = \frac{V \cdot \ q - 1}{s}$,

$q^{-n} = 1 - \frac{V \cdot \ q - 1}{s}$, kde q = 1,004 > 0 , logaritmováním

$-n \cdot \log q = \log\left(1 - \frac{V \cdot \ q - 1}{s}\right)$,

$n = -\frac{\log\left(1 - \frac{V \cdot \ q - 1}{s}\right)}{\log q}$, po dosazení n = 116,035 .

Úvěr bude splacen po přibližně 116 měsících, tedy po 9 letech a 8 měsících.

Poznámka:
Při řešení je možno užít též program ***A_Uvery_anuity.nb***, kde nastavíme V = 444 892, s = 4 800, i = 0,048 a hodnotu n měníme tak, aby anuita s byla poprvé vyšší než 4 800 Kč. Pro n = 116 vychází s = 4801 Kč, pro n = 117 vychází n = 4 769 Kč.

e) Celkový úrok činí 116 · 4801 – 444 892 = 112 024 Kč.

Příklad 3.19

Řešte úlohu 3.18 se stejnými hodnotami s tím rozdílem, že pan Kolář zvolil tarifní variantu B (rychlou) s následujícími podmínkami:

a) úroková sazba z vkladů je 1 % p.a.,

b) úroková sazba z úvěru je 3,7 % p.a.,

c) minimální procento naspoření je 38 % cílové částky,

d) minimální měsíční splátka úvěru je 0,8 % cílové částky.

Renta (důchod)

Příklad 3.20 (řešený)

Pan Hořejší si založil rentový účet se stálou úrokovou mírou 5 % a po dobu 20 let na něj ukládal vždy na počátku měsíce částku 1000 Kč. Ve smlouvě je dohodnuto, že po ukončení spoření bude po dobu 10 let pobírat měsíční rentu. Renta začne být vyplácena na konci prvního měsíce následujícího po měsíci ukončení spoření. Úrokovací období je 1 měsíc.

a) Jaký kapitál pan Hořejší ve spořící fázi naspořil?

b) Jaká je výše měsíční renty?

c) Jaká celková částka bude ve výběrové fázi panu Hořejšímu v rentách vyplacena?

Řešení:

V první, tkzv. ***spořící fázi***, naspořil pan Hořejší kapitál K ve výši (používáme předlhůtní spoření)

$$K = 1000 \cdot \left(1 + 0,85 \cdot 0,05 \cdot \frac{1}{12}\right) \cdot \frac{\left(1 + 0,85 \cdot 0,05 \cdot \frac{1}{12}\right)^{240} - 1}{0,85 \cdot 0,05 \cdot \frac{1}{12}} = 378598 \text{ Kč}.$$

Ve druhé, tkzv. ***výběrové fázi,*** bude panu Hořejšímu vyplácena vždy na konci měsíce renta v hodnotě takové, aby byla splněna následující **podmínka**:

Kdybychom vyplácenou rentu R použili k polhůtnímu spoření (vyplacenou rentu v daném měsíci tedy uložíme na jeho konci), musí být celková naspořená částka na konci výběrového období stejná, jako kdybychom počáteční kapitál nechali po stejnou dobu na účtu se stejnou úrokovou mírou a složeným úročením.

S využitím vzorce pro složené úročení a postlhůtní spoření tedy v našem případě máme

$$378\,598 \cdot \left(1 + 0,85 \cdot 0,05 \cdot \frac{1}{12}\right)^{120} = R \cdot \frac{\left(1 + 0,85 \cdot 0,05 \cdot \frac{1}{12}\right)^{120} - 1}{0,85 \cdot 0,05 \cdot \frac{1}{12}}$$

a po vyjádření R a numerickém výpočtu R = 3878 Kč.

Celkově vyplacená částka je pak C = 3878 · 120 = 465 360 Kč.

Pro srovnání:

Kdybychom počáteční kapitál nechali na účtu, bylo by tam na konci výběrového období

$$K_{120} = 378\,598 \cdot \left(1 + 0,85 \cdot 0,05 \cdot \frac{1}{12}\right)^{120} = 578\,665 \text{ Kč}.$$

Příklad 3.21 (řešený)

Odvoďme obecný vzorec pro výši jedné výplaty renty R a celkově vyplacené částky C za předpokladu, že K je kapitál na začátku výběrové fáze, i je roční úroková míra rentového účtu, k je zdaňovací koeficient, t je délka úrokovacího období ve dnech, n je počet úrokovacích období ve výběrové fázi (= počet výplat renty).

Řešení:

Podmínka pro výši renty z příkladu 3.17 je vyjádřena rovnicí

$$K\cdot\left(1+\frac{k\cdot i\cdot t}{360}\right)^n = R\cdot\frac{\left(1+\frac{k\cdot i\cdot t}{360}\right)^n-1}{\frac{k\cdot i\cdot t}{360}}\ .$$

Označíme-li $q = 1+\frac{k\cdot i\cdot t}{360}$, platí $R = K\cdot\frac{q^n\cdot\ q-1}{q^n-1}$.

Příklad 3.22

Pan Novák uložil jednorázově na rentový účet počátkem roku částku 1 500 000 Kč, kterou získal prodejem zděděného bytu. K výplatě první renty došlo na konci tohoto roku, renta se vyplácí jednou za rok, úroková míra je 4,8 %, úrokovací období jeden rok, renta bude vyplácena po dobu 15 let. Určete výši roční renty a celkovou částku vyplacenou panu Novákovi za 15 let.

Příklad 3.23

Manželé Marešovi chtějí své dceři zajistit pro dobu jejích studií v délce 5 let rentu ve výši 15 000 Kč vyplácenou na konci každého čtvrtletí. Jakou částku musí Marešovi jednorázově uložit na rentový účet těsně před začátkem dceřiných studií, jestliže je roční úroková míra 5,2 % a úrokovací období 3 měsíce? (Vklad zaokrouhlete na tisícikoruny.)

Příklad 3.24

Pan Šedivý spořil vždy na začátku roku na rentový účet částku 20 000 Kč po dobu 18 let. Spoření ukončil a chce požádat o výplatu renty po dobu 8 let, renta bude vyplácena vždy na konci roku počínaje rokem následujícím. Úrokovací období je 1 rok, úroková míra je stálá v obou fázích a činí 5,8 %. Určete

a) naspořenou částku ve spořící fázi,

b) výši roční renty,

c) celkově vyplacenou částku v rentách.

Důchodové připojištění

Příklad 3.25 (řešený)

Pan Kučera si zřídil penzijní připojištění u penzijního fondu banky BB za následujících předpokladů:

- pan Kučera spoří po dobu 12 let 1 500 Kč měsíčně
- státní příspěvek je 150 Kč měsíčně
- příspěvek zaměstnavatele pana Kučery je 200 Kč měsíčně
  (předpokládejme, že všechny výše uvedené částky jsou převedeny na rentový účet počátkem měsíce)
- podíly na zisku fondu předpokládejme (pro jednoduchost) stálé po celou dobu spořící i výběrové fáze a ekvivalentní úrokové míře 6 % p.a.
- po ukončení spoření volí pan Kučera čerpání naspořených prostředků formou doživotní renty,

výše renty je mu určena z předpokladu, že mu bude vyplácena dalších 14 let, vždy na konci měsíce

- úrokovací období je stále 1 měsíc
- daň z úroku je 15 % .

Určete

a) celkovou naspořenou částku
b) výši měsíční renty
c) celkovou vyplacenou částku za 14 let
d) celkovou vyplacenou částku za předpokladu, že bude pan Kučera žít o 10 let déle, čili stanovená renta mu bude ve stejné výši vyplácena celkem 24 let .

Řešení:

Počátkem každého měsíce se na účet ukládá částka 1850 Kč. Naspořená částka za 12 · 12 = 144 měsíců je tedy

$$K = 1850 \cdot \left(1 + 0.85 \cdot \frac{0,06}{12}\right) \cdot \frac{\left(1 + 0.85 \cdot \frac{0,06}{12}\right)^{144} - 1}{0.85 \cdot \frac{0,06}{12}} = \text{ 367 956 Kč .}$$

Výplata renty bude trvat 14 · 12 = 168 měsíců, výše renty bude podle vzorce odvozeného v př.3.21

$$R = K \cdot \frac{q^n \cdot \ q - 1}{q^n - 1} = 367956 \cdot \frac{\left(1 + 0,85 \cdot \frac{0,06}{12}\right)^{168} \cdot 0,85 \cdot \frac{0,06}{12}}{\left(1 + 0,85 \cdot \frac{0,06}{12}\right)^{168} - 1} = \text{ 3 069 Kč .}$$

Celková vyplacená částka v rentách je 3 069 · 168 = 515 592 Kč .
Pokud by vyplácení renty trvalo 24 · 12 = 288 měsíců, byla by vyplacená částka
3 069 · 288 = 883 872 Kč .

Poznámka:
Pro řešení úloh 3.20 – 3.25 lze užít programy ***A_Renta_faze 2.nb a A_Renta_faze 1_2.nb*** .

4 JEDNODUŠŠÍ ÚLOHY PRO ŽÁKY NIŽŠÍHO GYMNÁZIA A ŽÁKY ZÁKLADNÍ ŠKOLY

Přehled užitých pojmů

(obecné vzorce zde neuvádíme, předpokládá se řešení úsudkem na základě znalosti počítání s procenty a znalosti přímé úměrnosti - trojčlenky)

- **Úrok** je částka, kterou získává věřitel od dlužníka jako odměnu za půjčení peněz.
- **Dlužník** je fyzická osoba nebo instituce (banka, podnik ap.), která si peníze půjčuje.
- **Věřitel** je fyzická osoba nebo instituce (banka, podnik ap.), která peníze půjčuje.
- **Kapitál** je peněžní obnos (částka), který věřitel půjčuje dlužníkovi, nebo obnos, který je v daném okamžiku na účtě (vkladní knížce ap.).
- **Úroková míra** (úroková sazba) *roční* je podíl úroku získaného *za rok* a zapůjčené částky, udává se v procentech nebo jako desetinné číslo z intervalu (0; 1).
  V této sbírce bude vždy používána roční úr. míra, tedy úr.míra značená p.a. (per annum).
- **Daň z úroku** je část úroku, která se nevyplácí věřiteli a odvádí se státu; uvádí se v procentech.
  *V této sbírce vždy počítáme z daní z úroku **ve výši 15 %**. Daň z úroku odvádí osoba nebo instituce, která je vůči bance věřitelem (příjemcem úroku). Pokud je věřitelem banka, daň z úroku neodvádí.*
- **Úroková doba** je doba, po kterou je zapůjčená částka (vklad nebo úvěr) úročena.
  *V této sbírce budeme pro určení úrokové doby výhradně používat **evropský standard 30E/360** (německá metoda), ve kterém má každý měsíc 30 dní, rok má 360 dní. Do úrokové doby budeme jako poslední den úročení započítávat den splatnosti, nikoli však den vkladu nebo poskytnutí úvěru.*
- **Úrokovací období** je časový úsek mezi dvěma po sobě následujícími úročeními.
  Úrokovací období může být *roční, pololetní, čtvrtletní, měsíční, týdenní, denní.*
- **Termínovaný vklad** (účet) má určenou dobu splatnosti, po kterou nelze z účtu bez sankcí peníze vybírat. Doba splatnosti může být *několik dní až několik let.*
- **Revolving** je obnovení termínovaného účtu za stejných podmínek na další úrokovací období. Zdaněný úrok z minulého období je připsán k účtu a s ním dále úročen.
- **Jednoduché úročení** je takový způsob úročení, při kterém se úrok na konci každého úrokovacího období počítá z počátečního kapitálu.
- **Složené úročení** je takový způsob úročení, při kterém se úroky přičítají k již dosaženému kapitálu a spolu s ním se dále úročí.
- **Dluhopis (obligace)** je cenný papír, kterým se dlužník, který tento papír vydává, zavazuje jeho majiteli, že mu splatí uvedenou částku včetně příslušného úroku ve stanoveném termínu. Dluhopisy vydává stát, obce, banky, podniky.
- **Faktura** je účet za provedenou práci nebo dodané zboží. Obsahuje obvykle cenu a popis dodaného zboží (vykonané práce), způsob platby a datum splatnosti.
- **Penále** je sankce za zpožděnou platbu (nedodržení data splatnosti).

Úlohy 4

(Všechny výsledky zaokrouhlete na celé koruny, úrokové sazby na desetiny procenta.)

Příklad 4.1

Panu Jiříkovi poskytla banka úvěr (půjčku) ve výši 48 000 Kč na jeden rok. Po roce pan Jiřík půjčenou částku vrátí včetně úroku, který banka účtuje ve výši 16,5 % z úvěru. Vypočtěte

a) kolik činí úrok z úvěru,

b) jakou celkovou částku zaplatí pan Jiřík bance.

Příklad 4.2

Za poskytnutí úvěru ve výši 250 000 Kč na jeden rok požaduje banka X úrok ve výši 15,2 %, banka Y ve výši 14,9 % dlužné částky. Zjistěte rozdíl úroků z uvedené částky v bankách X a Y.

Příklad 4.3

Poslední den roku 2008 uložil pan Hlavatý na běžný účet v bance na jeden rok kapitál ve výši 29 000 Kč. Roční úroková míra je 3,8 %. Poslední den roku 2009 banka kapitál zúročila. Zjistěte částku, kterou měl pan Hlavatý na účtu po tomto zúročení. (Daň z úroku je 15 %, stejně tak i v dalších úlohách.)

Příklad 4.4

Paní Vondrášková si založila vkladní knížku poslední den roku 2007 a hned na ni uložila 14 000 Kč. Určete roční úrokovou míru pro tuto knížku, jestliže paní Vondrášková měla na konci roku 2008 kapitál ve výši 14 274 Kč. (Předpokládáme, že další částky během roku 2008 neukládala ani nic nevybírala.)

Příklad 4.5

Jaký kapitál uložil pan Kopecký na konci roku na vkladní knížku s úrokovou sazbou 2 %, jestliže na konci příštího roku měl po zúročení na knížce částku 23 900 Kč?

Příklad 4.6

Paní Míšková si uložila v bance na termínový vklad na 3 měsíce částku 70 000 Kč. Roční úroková míra je 4,5 %. Vypočti výsledný kapitál, jestliže se úročí jen na konci tříměsíčního období.

Příklad 4.7

Manželé Kučerovi si 13.dubna uložili na vkladní knížku s úrokovou sazbou 1,9 % p.a. částku 48 000 Kč. 16. listopadu téhož roku částku vybrali včetně připsaného úroku. Kolik Kč to bylo?

Příklad 4.8 (řešený)

Termínovaný vklad na 1 měsíc s revolvingem má úrokovou sazbu 4,3 % p.a. Poslední den v měsíci jsme na tento vklad uložili 100 000 Kč. Kolikrát musíme vklad obnovit (revolvovat), abychom měli na účtě alespoň

a) 101 000 Kč,

b) 105 000 Kč ?

Po kolika měsících si můžeme nejdříve výsledný kapitál vybrat?

Řešení:

a) Je – li počet revolvingů malý, můžeme úlohu řešit i tímto jednoduchým způsobem:
Aby byl výsledný kapitál alespoň 101 000 Kč, musí celkový čistý úrok činit alespoň 1 000 Kč.
Při jednoduchém úročení je čistý úrok za každý měsíc $100000 \cdot \frac{0,043}{12} \cdot 0,85 \doteq 305$ Kč .
Na konci 1. měsíce činí úrok 305 Kč a vklad je poprvé obnoven. Podobně je na konci 2. měsíce úrok 2 · 305 = 610 Kč, na konci 3. měsíce 3 · 305 = 915 Kč, na konci 4. měsíce 4 · 305 = 1220 Kč.
Kapitál tedy můžeme vybrat po 4 měsících (tj. třikrát jej revolvujeme).

b) V druhém případě bude počet revolvingů větší a proto použijeme k jeho výpočtu nerovnici:
Čistý úrok za jeden měsíc je opět 305 Kč, počet měsíců označme n, celkový čistý úrok musí být alespoň 5 000 Kč. Musí tedy platit

$$n \cdot 305 \geq 5000 \text{ , z čehož máme}$$

$$n \geq \frac{5000}{305} \doteq 16,4 \text{ .}$$

Musíme tedy spořit alespoň 17 měsíců, provedeme 16 revolvingů.

*Příklad 4.9 (řešený)

Pan Novotný si uložil poslední den roku 2008 na běžný účet se stálou úrokovou mírou 1,8 % částku 170 000 Kč. Úrokovací období je 1 rok, úročí se vždy na konci roku, banka užívá **složené úročení**. Zjistěte částky, které budou na účtě po zúročení na koncích roků 2009, 2010, 2011, 2015, jestliže se žádné další pohyby finančních prostředků na účtě nekonají.
Postup zobecněte a určete kapitál na účtu na konci n – tého roku za stejných podmínek.

Řešení:

Na konci roku 2009 bude na účtu částka

$$K_1 = 170000 + 170000 \cdot 0,018 \cdot 0,85 = 170000 \cdot (1 + 0,018 \cdot 0,85) = 170000 \cdot 1,0153 \doteq 172601 \text{ Kč.}$$

Tuto částku považujeme za nový základ pro výpočet úroku za rok 2010, proto na konci tohoto roku bude na účtu částka

$$K_2 = 172601 + 172601 \cdot 0,018 \cdot 0,85 = 172601 \cdot 1,0153 = 170000 \cdot 1,0153^2 \doteq 175242 \text{ Kč .}$$

Podobně (a už stručněji) bude na konci roku 2011 na účtu částka

$$K_3 = 175241 \cdot 1,0153 = 170000 \cdot 1,0153^3 \doteq 177923 \text{ Kč.}$$

.

.

Na konci roku 2015 bude tedy na účtu částka

$K_7 = 170000 \cdot 1,0153^7 \doteq 189064$ Kč.

Zobecníme-li poznatek, že výše uvedený kapitál je na účtu po 7 letech spoření, dostáváme pro kapitál na konci n – tého roku spoření (za stále stejných podmínek):

$$\boxed{K_n = 170000 \cdot 1,0153^n \text{ Kč.}}$$

*Příklad 4.10

Na konci roku 2007 jsme uložili na běžný účet částku 240 000 Kč. Úrokovací období je 1 měsíc, úročí se vždy na konci kalendářního měsíce. Úroková sazba je 1,5 % p.a. Zjistěte kapitál na účtě na konci roku 2009, jestliže předpokládáme

a) jednoduché úročení,

b) složené úročení.

[Návod pro b) - viz př 4.9.]

Příklad 4.11

Pan Jiřík uložil počátkem roku na účet 50 000 Kč, roční úroková sazba je 2,75 %, úročí se na konci kalendářního roku. Jakou částku bude mít na účtu na konci tohoto roku, jestliže by daň z úroku činila

a) 0 % , b) 15 % , c) 30 % , d) 50 % , e) 75 % , f) 100 % ?

Příklad 4.12

Paní Hosnedlová zakoupila dluhopis s dobou splatnosti 3 roky a roční úrokovou mírou 5,2 % za 40 000 Kč. Úročí se a úrok je vyplacen vždy po roce od data zakoupení dluhopisu, daň z úroku je 25 %. Vypočtěte, kolik Kč získala paní Hosnedlová ve formě úroků za 3 roky.

Příklad 4.13

Na obyčejnou vkladní knížku (bez výpovědní lhůty) jsme uložili 5.2. částku 22 000 Kč, úroková míra je 2,2 % p.a. Celkovou částku na knížce jsme vybrali 10.10. téhož roku. Banka úročila jen jednou, a to v den výběru. Určete vybraný obnos.

(Používáme evropský standard 30E/360 - viz přehled pojmů v úvodu kapitoly.)

Příklad 4.14

Pan Kadeřavý si založil dne 25.11.2008 obyčejnou vkladní knížku s úrokovou mírou 2 % a uložil na ni ihned částku 70 000 Kč. Dále již nic neukládal, vkladní knížku zrušil a celou částku z knížky vybral dne 17.3.2010. Banka úročila vždy na konci kalendářního roku a v den výběru, používá jednoduché úročení a evropský standard 30E/360. Určete částku vybranou po zrušení knížky.

Příklad 4.15

Na běžný účet jsme 2.3. uložili částku 110 000 Kč a dne 23.12. téhož roku vybrali částku 110 907 Kč. Určete roční úrokovou míru účtu.

*Příklad 4.16

Pan Horáček si chce zřídit na konci roku 2010 vkladní knížku s výpovědní lhůtou 1 rok a uložit na ni částku 35 000 Kč. K dispozici má tři banky A,B,C, které nabízejí následující podmínky:

A - úroková míra 4,5 %, úrokovací období 1 rok, úročí se vždy na konci roku (31.12.),

B - úroková míra 4,5 %, úrokovací období 1/2 roku, úročí se vždy na konci pololetí (30.6. a 31.12),

C - úroková míra 4,4 %, úrokovací období 1/4 roku, úročí se vždy na konci čvrtletí (31.3, 30.6., 30.9. a 31.12),

všechny banky používají složené úročení a evropský standard 30E/360.

Určete, která banka je pro pana Horáčka nejvýhodnější (včetně částek, které by měl na knížce v jednotlivých bankách na konci roku 2011).

[Viz př. 4.9]

Příklad 4.17

Odběratel nezaplatil dodavateli fakturu znějící na částku 71 000 Kč a splatnou 10.4.2011. Dodavatel účtuje v souhlasu se smlouvou penále ve výši 0,06 % fakturované částky za každý den prodlení. Jak velké bude penále k 29.6. 2011? (Započtěte jen jeden z krajních dnů intervalu.)

Příklad 4.18

Podnikatel pan Jabůrek si na nákup materiálu půjčil od banky dne 24.4. daného roku částku 28 000 Kč, 30.6. částku 35 000 Kč a 10.10. částku 15 000 Kč. Úročí se na konci kalendářního roku, úroková míra je 12 %. Kolik zaplatí do konce daného roku pan Jabůrek na úrocích?

*Příklad 4.19

Podnikatelka paní Jirásková si na dovybavení výrobny novou technikou půjčila od banky 20.2. roku 2009 částku 200 000 Kč. Úroková míra je 14 % , úročí se na konci roku. Dne 15.7. splatila bance částku 40 000 Kč a 21.9. částku 30 000 Kč. Vypočtěte

a) úrok do konce roku 2009,

b) výši dluhu na konci roku 2009.

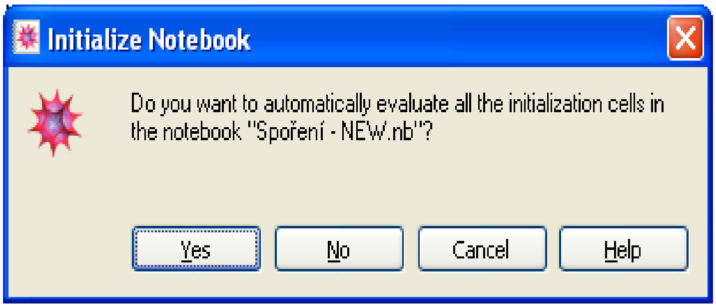
5 UŽITÍ VÝPOČETNÍ TECHNIKY PŘI ŘEŠENÍ ÚLOH Z FINANČNÍ MATEMATIKY

A. PŘEHLED PŘILOŽENÝCH PROGRAMŮ VYTVOŘENÝCH V PROSTŘEDÍ **MATHEMATICA 7**

Pro řešení úloh výše uvedených typů je velmi vhodné užít výpočetní techniku, tedy počítač s vhodným programem nebo kalkulátor. Přílohou této sbírky je také sada aplikačních pogramů (apletů) vytvořených v prostředí Wolfram Mathematica 7, které řeší z hlediska uživatele velmi pohodlným způsobem většinu zmíněných úloh. Pro spuštění apletů je nutno mít nainstalovaný program Mathematica (verze 7 a vyšší). Aplety nahrazují některé kalkulátory běžně dostupné na webových stránkách finančních institucí, navíc však umožňují vypočítat hodnoty více parametrů, které se vyskytují ve vzorcích použitých v předešlých kapitolách.

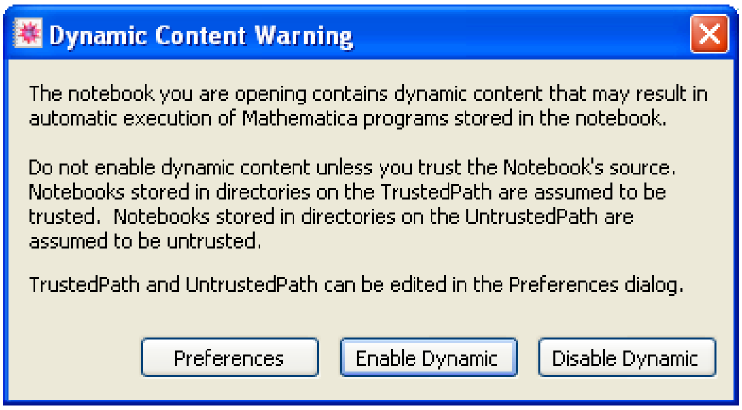
Obecné poznámky pro práci s aplety vytvořenými v Mathematica 7:

Chcete-li ukončit práci s programem, zavřete ho (CLOSE), ale neukládejte (neprovádějte SAVE).
Návod pro práci s konkrétním programem je uveden včetně užitých vzorců v jeho úvodu.
Pokud se po spuštění programu objeví dialogové okno



, odpovězte "YES".

Pokud se po spuštění programu objeví dialogové okno



, odpovězte "Enable Dynamic".

Hodnoty vstupních proměnných měníme buď pomocí posuvníků, nebo je přímo zadáváme do vstupních numerických polí přepsáním aktuální hodnoty a kliknutím myší mimo oblast posuvníků.
Upozornění: Doporučuje se mít v daném okamžiku otevřený jen jeden program. Při spuštění více programů najednou se může jejich činnost ovlivňovat.

Přílohou sbírky jsou tyto programy

- **Program pro řešení úloh z jednoduchého a složeného úrokování**
  (soubor *A_Uroky.nb*)

- **Program pro řešení úloh o úvěrech**
  (soubor *A_Uvery_anuity.nb*)

- **Program pro řešení úloh o spoření**
  (soubor A_*Sporeni.nb*)

- **Program pro řešení úloh s obecně zadanou úrokovou dobou a jednoduchým úročením**
  (soubor *A_Jedn.uroceni.nb*)

- **Program pro řešení úloh s proměnnou délkou úrokovacího období**
  (soubor *A_Jedn_Sloz_Spoj_urok.nb*)

- **Program pro grafické porovnání jednoduchého a složeného úročení při různých úrokovacích dobách**
  (soubor *A_Grafy_Jedn_Sloz_urok.nb*)

- **Program pro výpočet celkového úroku a naspořené částky při kombinaci jednoduchého a složeného úročení (model stavebního spoření)**
  (soubor *A_Spor_Kombin.nb*)

- **Program pro výpočet hodnoty vyplácené renty – výběrová fáze**
  (soubor *Renta_faze2 .nb*)

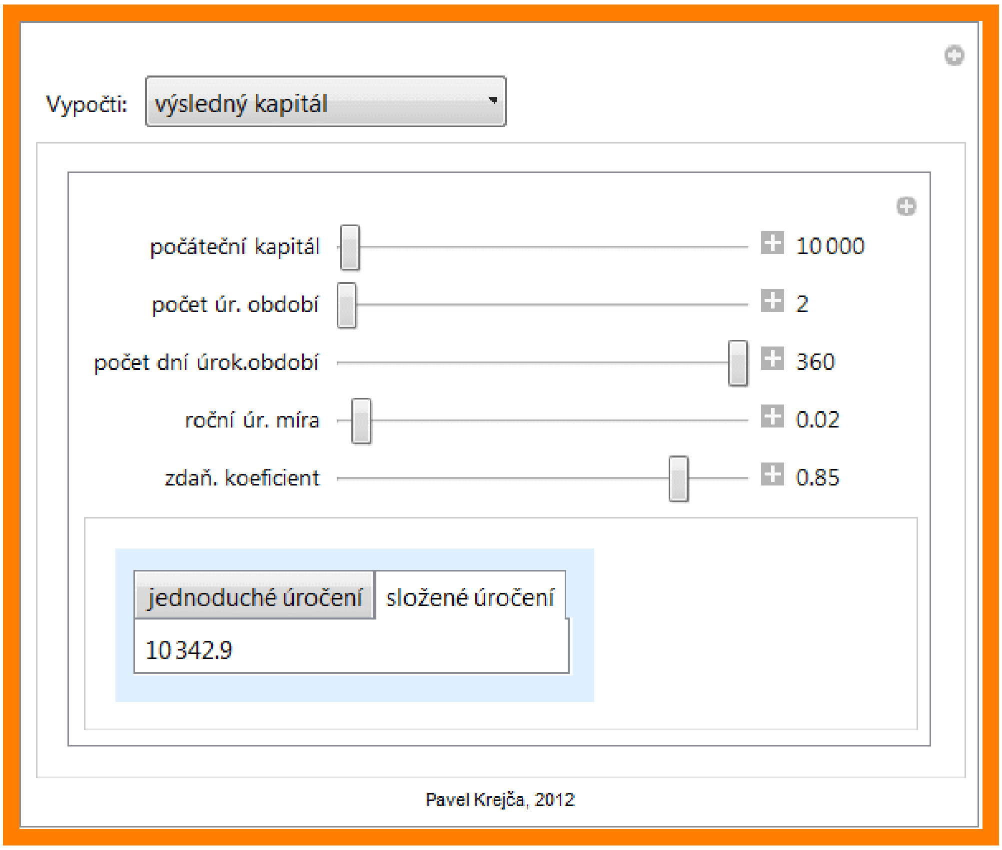
- **Program pro výpočet hodnoty vyplácené renty – spořící i výběrová fáze**
  (soubor *Renta_faze1_2.nb*)

- **Program pro výpočet doby splácení úvěru za předpokladu, že je splácen stejnými předem dohodnutými splátkami**
  (soubor *Fix_splatky_uveru.nb*)

Dále je uvedena podoba pracovní plochy při práci s danými programy a základní popis jejich funkce.
(Z prostorových důvodů jsou obrázky uváděny v jiném pořadí, než na seznamu výše.)

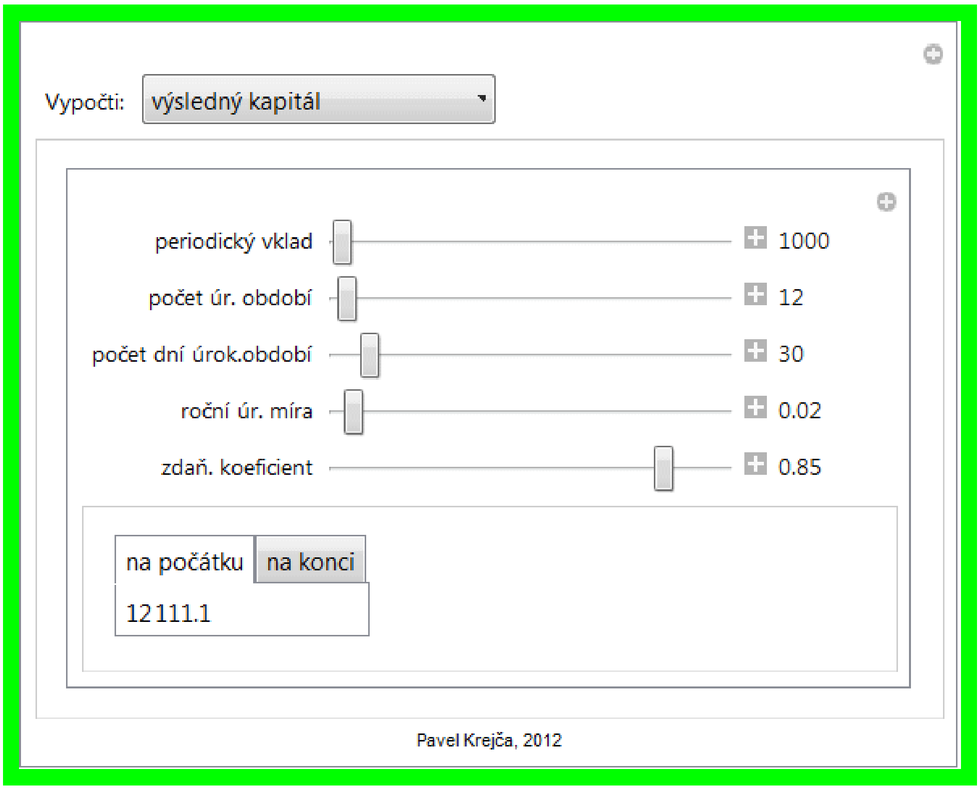
A_Uroky.nb

Pomocí roletového menu vybereme výpočet K_n , K_0, t, i, n. Ten je proveden současně pro složené i jednoduché úročení. Prostřednictvím posuvníků nebo numerických polí vpravo od posuvníků (rozkliknutím pole "+" získáme další numerické pole pod posuvníkem) zadáme hodnoty ostatních parametrů včetně zdaňovacího koeficientu k. Pro některé kombinace vstupních hodnot nemusí mít úloha řešení.



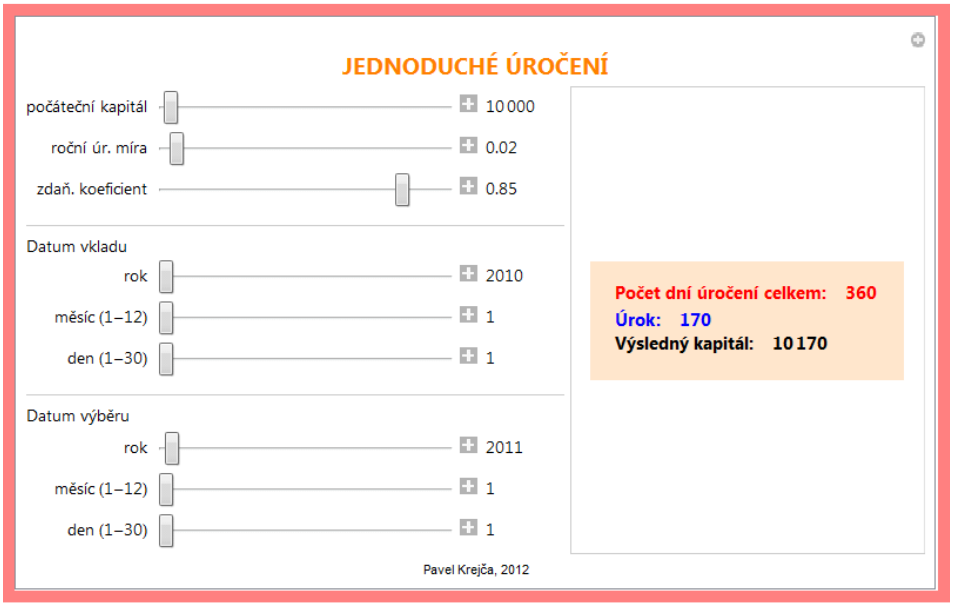
A_Sporeni.nb

Zvolíme pomocí menu výpočet hodnoty K_0 (periodický vklad), K_n , i, t nebo n. Zadáme ostatní parametry včetně zdaňovacího koeficientu k. Výsledky jsou zobrazeny pro obě situace - vklad je prováděn na začátku nebo na konci úrokovacího období.



A_Jedn_uroceni .nb

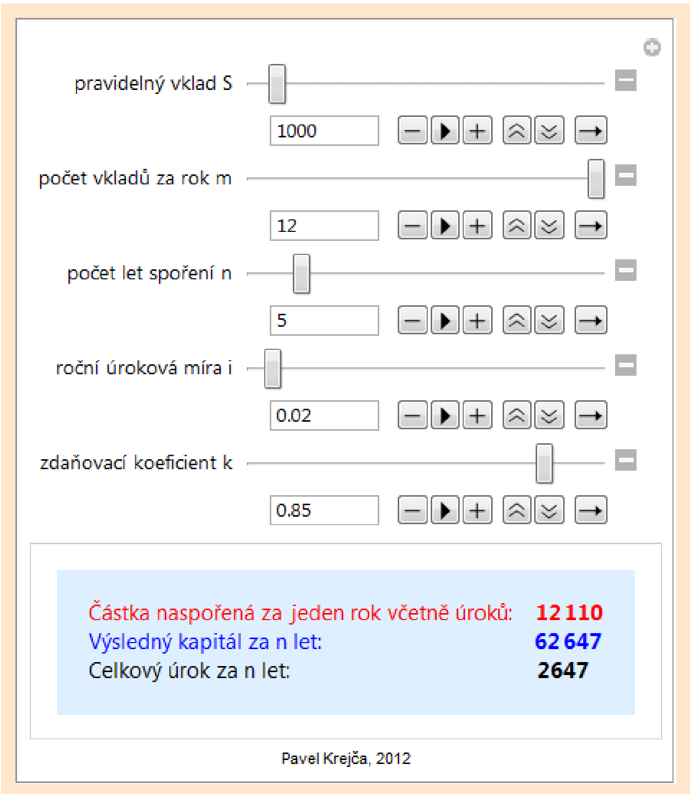
Provede výpočet celkové úrokovací doby (doby splatnosti), celkovou výši úroku a výsledný kapitál na účtu při jednoduchém úročení. Zadává se datum vkladu a výběru ve tvaru rok/měsíc/den a dále počáteční kapitál K_0, roční úroková míra i , zdaňovací koeficient k.



A_Spor_Kombin.nb

Program řeší kombinaci jednoduchého krátkodobého úročení a složeného dlouhodobého úročení (situace typická např. pro stavební spoření).

Předpokládají se pravidelné vklady ve výši S m-krát za kalendářní rok, v jehož rámci probíhá jednoduché úročení. Urokovací období je jeden rok, úročí se vždy na konci roku. Meziročně probíhá složené úročení. Program vypočítá celkovou uspořenou částku za kal. rok, celkovou uspořenou částku za n let a celkový úrok za n let.



A_Uvery_anuity.nb

Vstupní hodnoty jsou V (výše úvěru) , t , i , n. Program vypočte výši anuitní splátky a celkově zaplacený úrok. Dále zobrazí tabulkově i graficky umořovací plán (tj. výši úroku, úmoru a zbývající dluh v jednotlivých obdobích splácení úvěru).
Závislosti jsou pro větší názornost zobrazeny spojitými křivkami.
Zobrazení tabulky, zejména při velkých n, je vhodné vypnout.

Vstupní hodnoty

úvěr 100 000

počet dní úrok.období 30

roční úr. míra 0.15

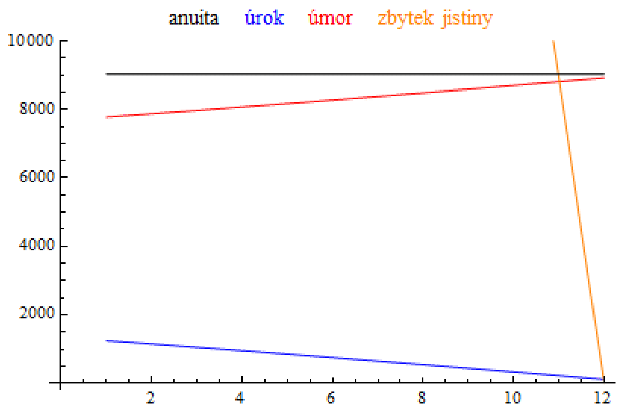
počet úr. období (splátek) 12

Zobrazit tabulku umořovacího plánu

tabulka ☑

Grafické znázornění umořovacího plánu

max. hodnota na ose y 10 000



Pavel Krejča, 2012

anuitní splátka == 9026

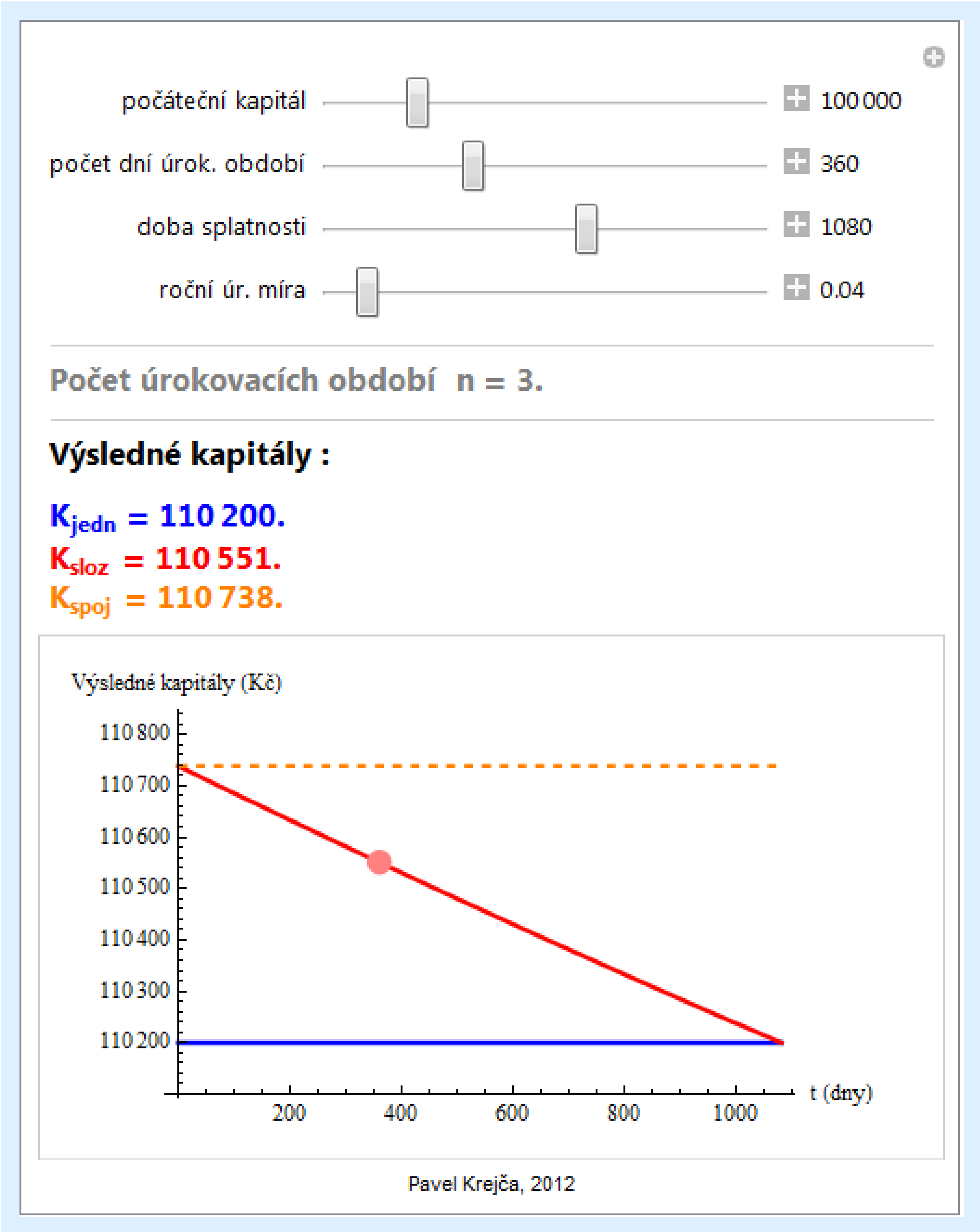
celkový úrok == 8310

Umořovací plán

n	počátek	úrok	úmor	konec
1	100 000	1250	7776	92 224
2	92 224	1153	7873	84 351
3	84 351	1054	7971	76 380
4	76 380	955	8071	68 309
5	68 309	854	8172	60 137
6	60 137	752	8274	51 863
7	51 863	648	8378	43 485
8	43 485	544	8482	35 003
9	35 003	438	8588	26 414
10	26 414	330	8696	17 719
11	17 719	221	8804	8914
12	8914	111	8914	0

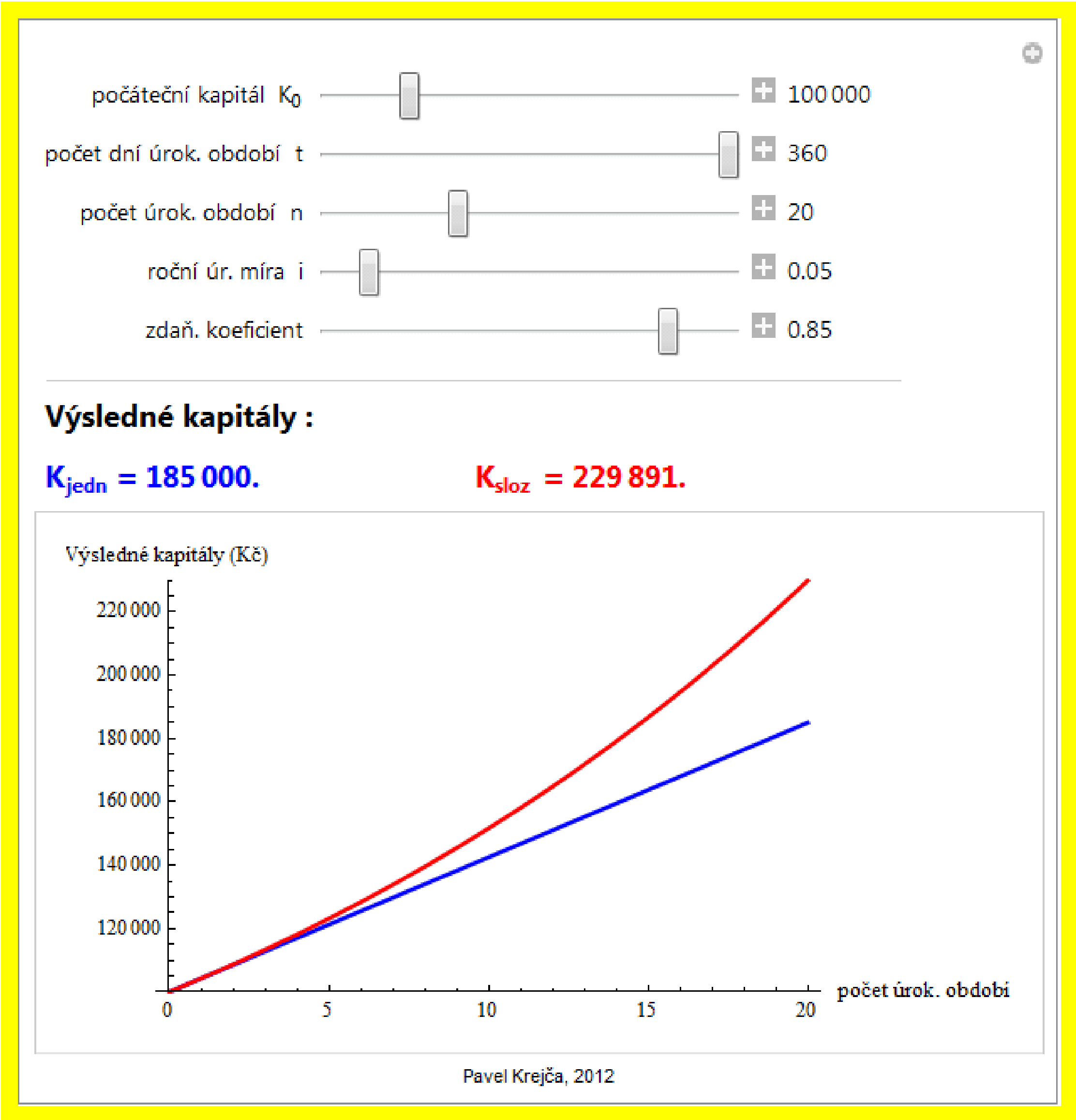
A_Jedn_Sloz_Spoj_urok.nb

Zadáme K_0 , t , i a celkovou dobu splatnosti (úrokovou dobu) s. Vypočten je počet úrokovacích období n a výsledné kapitály při jednoduchém, složeném a spojitém úrokování. Pro všechny tři druhy úročení je (stejnou barvou jako vypočtené kapitály) nakreslen graf závislosti výsledného kapitálu na délce úrokovacího období t . Růžový bod znázorňuje závislost výsledného *kapitálu při složeném úročení* na aktuálně nastavené hodnotě t. Zbývající kapitály na t nezávisejí.



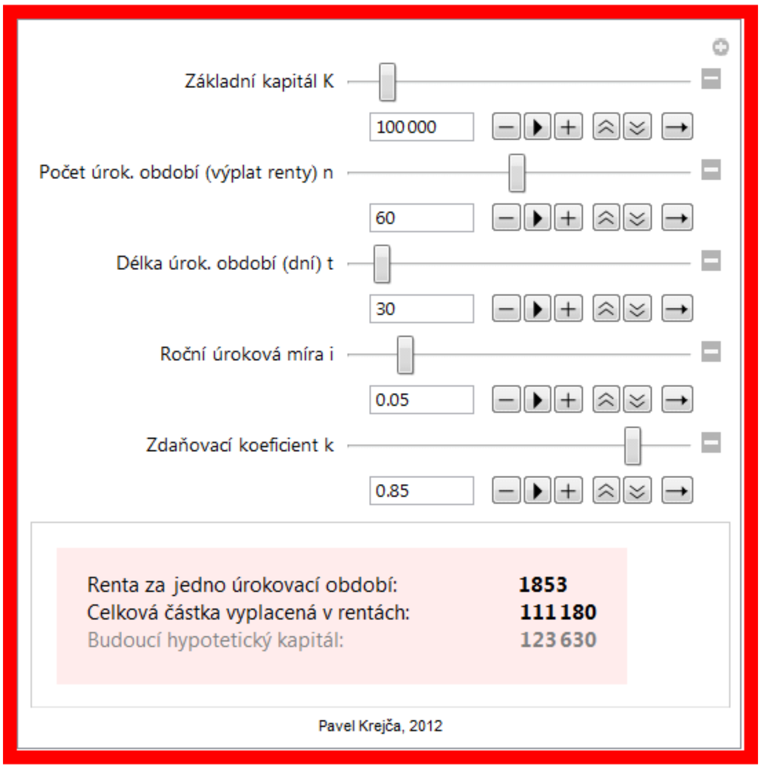
A_Grafy_Jedn_Sloz_urok.nb

Zadáme K_0 , t , n , i, k . Vypočteny jsou výsledné kapitály K_n pro jednoduché i složené úročení. Hodnoty kapitálů jsou znázorněny spojitými křivkami procházejícími body, které odpovídají kapitálům na koncích jednotlivých úrokovacích období.



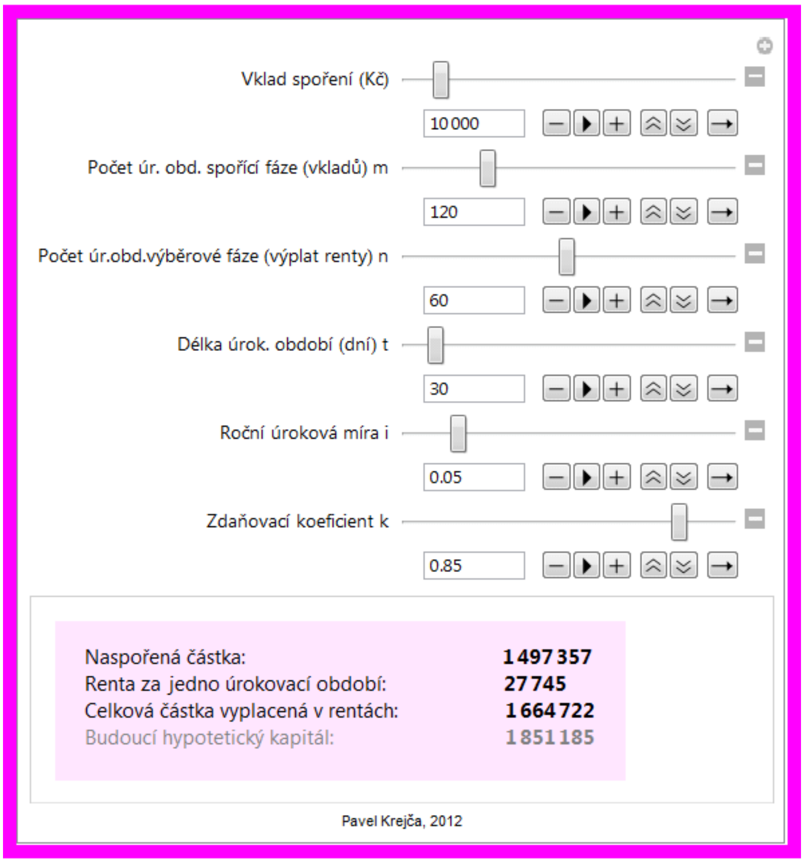
A_Renta_faze2.nb

Program počítá výši jedné renty za dané úrokovací období, celkovou výši renty vyplacené za celé výběrové období a hypotetický budoucí kapitál, který by byl na účtu na konci výběrového období, kdyby se na účtu bez výběru ponechal počáteční kapitál.
Zadáváme počáteční kapitál na účtu K, dále k, i, t, n.



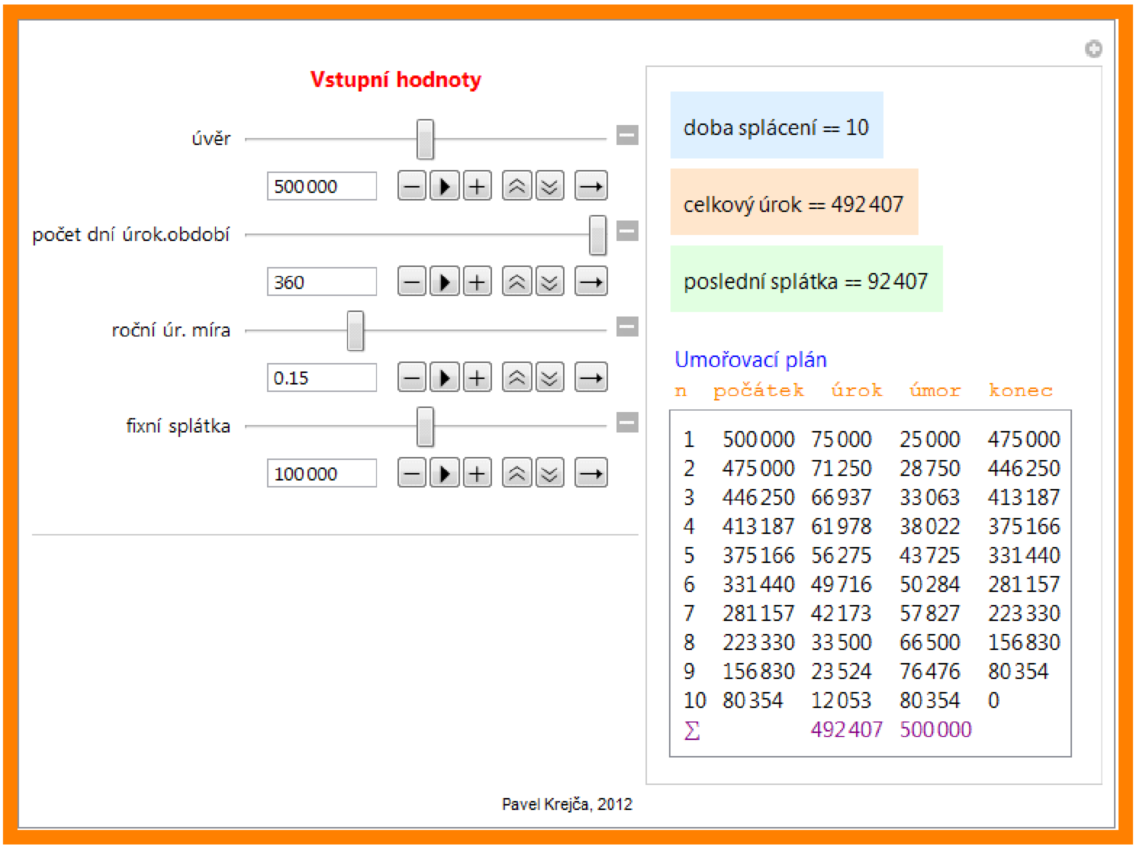
A_Renta_faze1_2.nb

Program počítá naspořený kapitál na konci spořící fáze, výši jedné renty, celkovou výši renty vyplacené za celou výběrovou fázi a hypotetický budoucí kapitál, který by byl na účtu na konci výběrové fáze, kdyby se na účtu bez výběru ponechal naspořený kapitál.
Zadáváme výši spořené částky K_0, počet úrok. období m spořící fáze, počet výplat renty n, dále k, i, t (tyto parametry jsou společné pro obě fáze).



A_Fix_splatky_uveru.nb

Program určí dobu splácení úvěru, celkový úrok, výši poslední splátky a vytvoří umořovací plán za předpokladu splácení úvěru dohodnutými fixními splátkami. Splátky se provádí vždy na konci úrokovacího období, poslední splátka je obvykle nižší. Zadáváme výši úvěru a hodnotu fixní splátky, délku úrokovacího období a roční úrokovou míru.



n	počátek	úrok	úmor	konec
1	500 000	75 000	25 000	475 000
2	475 000	71 250	28 750	446 250
3	446 250	66 937	33 063	413 187
4	413 187	61 978	38 022	375 166
5	375 166	56 275	43 725	331 440
6	331 440	49 716	50 284	281 157
7	281 157	42 173	57 827	223 330
8	223 330	33 500	66 500	156 830
9	156 830	23 524	76 476	80 354
10	80 354	12 053	80 354	0
∑		492 407	500 000	

Všechny programy obsahují použité vzorce a popis významu jednotlivých proměnných.
Vstupní hodnoty se zadávají do žlutých buněk, výsledky jsou v modrých buňkách.
Zde je uvedena jen stručná anotace programů a vzhled jejich pracovní plochy - tabulky.

E_Leasing 2.16.xlsx

Program řeší úlohu 2.16.
Lze jej užít i pro řešení dalších podobných úloh, pokud upravíme vstupní hodnoty.
Hodnoty pro vygenerování grafů jsou obsaženy ve sloupcích P,Q,R,S.

E_Uroky.xlsx

Program počítá výsledný kapitál při jednoduchém i složeném úročení. Generuje tabulku částek na účtu pro obě úročení a jejich grafické srovnání.

ÚROKY

Pavel Krejča, 2012

Výpočet výsledného kapitálu při jednoduchém i složeném úročení

Vstupní hodnoty:	
Počáteční kapitál K_0	2000000
Počet úrokovacích období n	9
Délka úrokovacího období (dní) t	360
Roční úroková míra i (des. číslem)	0,1
Zdaňovací koeficient k	0,85

Výstupní hodnoty:		
Výsledný kapitál K_n	jednoduché úr.	3530000
	složené úr.	4167711

Vzorce:

Jednoduché úročení

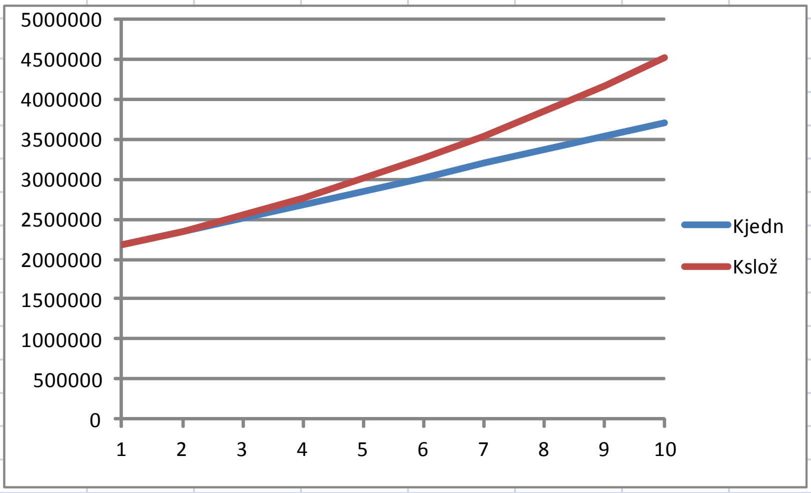
$$K_n = K_0 \cdot \left(1 + k \cdot i \cdot \frac{t}{360} \cdot n\right)$$

Složené úročení

$$K_n = K_0 \cdot \left(1 + k \cdot i \cdot \frac{t}{360}\right)^n$$

Tabulka hodnot výsledných kapitálů a odpovídající grafy
(nastaveno n = 12, ručně možno počet řádků zvětšit - CTRL D)

n	K_{jedn}	$K_{slož}$
1	2170000	2170000
2	2340000	2354450
3	2510000	2554578
4	2680000	2771717
5	2850000	3007313
6	3020000	3262935
7	3190000	3540284
8	3360000	3841209
9	3530000	4167711
10	3700000	4521967
11	3870000	4906334
12	4040000	5323372



E_Uvery_anuity.xlsx

Program počítá výši anuitní splátky a celkový úrok při splácení úvěru. Generuje umořovací plán a jeho grafické znázornění.

ÚVĚRY, ANUITY

Pavel Krejča, 2012

Výpočet výše anuitní splátky a celkového úroku při splácení úvěru (splátka se provádí na konci úrok. období)

Vstupní hodnoty:

Výše úvěru V	100000
Počet úrokovacích období (splátek) n	12
Délka úrokovacího období (dní) t	30
Roční úroková míra i (des. číslem)	0,15

Výstupní hodnoty:

Hodnota anuitní splátky s	9026
Celkový úrok U	8310

Vzorce:

Anuitní splátka

$$s=\frac{V\cdot\left(1+\frac{i\cdot t}{360}\right)^{n}\cdot\frac{i\cdot t}{360}}{\left(1+\frac{i\cdot t}{360}\right)^{n}-1}$$

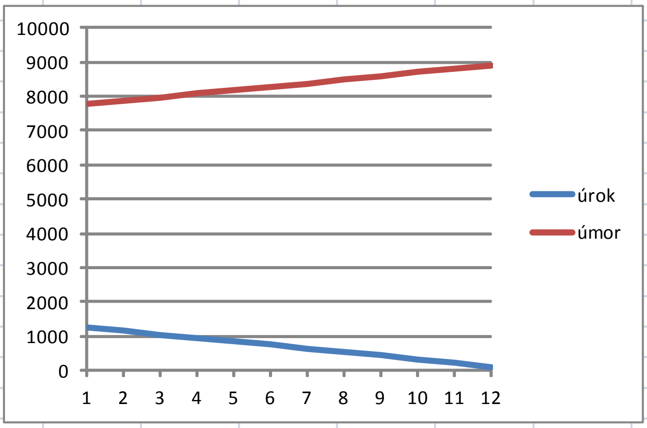
Celkový úrok

$$U=n\cdot s-V$$

Umořovací plán a jeho graf

(nastaveno n = 12, ručně možno počet řádků zvětšit - CTRL D,
pokud je nastavený počet řádků větší než doba splácení,
jsou v nadbytečných řádcích záporné hodnoty)

n	počátek	úrok	úmor	konec
1	100000	1250	7776	92224
2	92224	1153	7873	84351
3	84351	1054	7971	76380
4	76380	955	8071	68309
5	68309	854	8172	60137
6	60137	752	8274	51863
7	51863	648	8378	43485
8	43485	544	8482	35003
9	35003	438	8588	26414
10	26414	330	8696	17719
11	17719	221	8804	8914
12	8914	111	8914	0



E_Sporeni.xlsx

Program počítá výsledný kapitál při pravidelně spořené konstantní částce (na začátku nebo na konci úrokového období). Částky, které jsou na účtě na koncích jednotlivých úrokovacích období, jsou znázorněny v tabulce a graficky.

SPOŘENÍ

Pavel Krejča, 2012

Výpočet výsledného kapitálu při pravidelně spořené částce na začátku nebo na konci úrok. období (slož. úročení)

Vstupní hodnoty:

Částka ukládaná na začátku/konci úrok. období	1000
Počet úrokovacích období n	12
Délka úrokovacího období (dní) t	30
Roční úroková míra i (des. číslem)	0,04
Zdaňovací koeficient k	0,85

Výstupní hodnoty:

Výsledný kapitál K_n	ukládání na začátku	12223
	ukládání na konci	12189

Vzorce:

Ukládání na začátku úrok. období

$$K_n = K_0 \cdot \left(1 + k \cdot i \cdot \frac{t}{360}\right) \cdot \frac{\left(1 + k \cdot i \cdot \frac{t}{360}\right)^n - 1}{k \cdot i \cdot \frac{t}{360}}$$

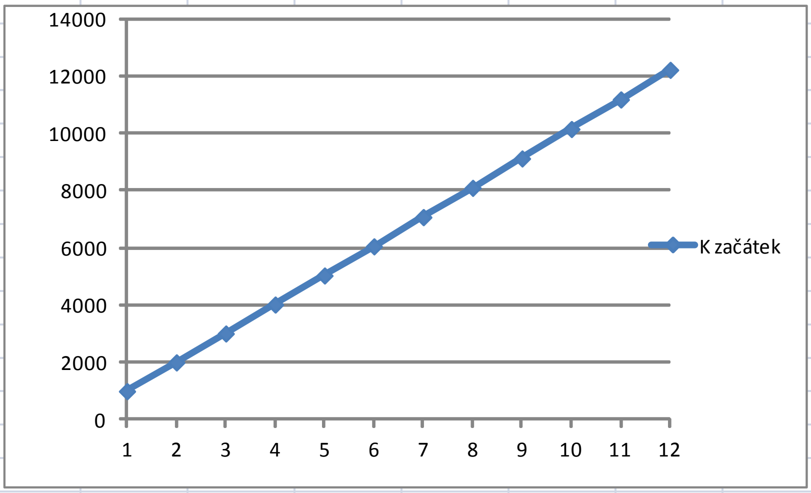
Ukládání na konci úrok. období

$$K_n = K_0 \cdot \left(1 + k \cdot i \cdot \frac{t}{360}\right)^n$$

Tabulka hodnot výsledných kapitálů a odpovídající graf pro $K_{zač}$

(nastaveno n = 12, ručně možno počet řádků zvětšit - CTRL D)

n	$K_{začátek}$	K_{konec}
1	1003	1000
2	2009	2003
3	3017	3009
4	4028	4017
5	5043	5028
6	6060	6043
7	7080	7060
8	8103	8080
9	9128	9103
10	10157	10128
11	11189	11157
12	12223	12189



E_Jedn_uroceni.xlsx

Program počítá výsledný kapitál při jednoduchém úročení a obecně zadané úrokové době. Zadává se datum vkladu a výběru v podobě Rok-Měsíc-Den.

JEDNODUCHÉ ÚROČENÍ

Pavel Krejča, 2012

Výpočet výsledného kapitálu při jednoduchém úročení s obecnou úrokovou dobou

Zadáváme rok, měsíc a den vkladu a výběru. Program předpokládá standard 30E/360, kdy má každý měsíc 30 dnů a rok 360 dnů. Den vkladu se neúročí, den výběru ano. Pokud by se vklad nebo výběr konal 31. dne měsíce, je nutno zadat 30. Datum výběru musí být vyšší než datum vkladu.

Vstupní hodnoty:		
Počáteční kapitál K_0	100000	Vzorec:
Roční úroková míra i (des. číslem)	0,02	
Zdaňovací koeficient k	0,85	Jednoduché úročení
		$\boxed{K = K_0 \cdot \left(1 + k \cdot i \cdot \frac{T}{360}\right)}$
Datum vkladu:		
Rok (např. 2011)	2010	
Měsíc (1 - 12)	7	
Den (1 - 30)	15	Úrok
Datum výběru:		
Rok (např. 2011)	2012	$\boxed{U = K - K_0}$
Měsíc (1 - 12)	3	
Den (1 - 30)	20	
Výstupní hodnoty:		
Celková úroková doba T (dní)	605	
Výsledný kapitál K	102857	
Celkový úrok U	2857	

E_Renta.xlsx

Program počítá naspořenou částku v první, spořící fázi (tuto část programu není nutno využít, pokud je základní kapitál pro druhou, výběrovou fázi, zadán přímo).
Dále počítá výši konstantní renty vyplácené ve výběrové fázi.

RENTA

Pavel Krejča, 2012

Výpočet uspořené částky (spořící fáze) a výše vyplácené renty (výběrová fáze)

Spořící fáze (tuto část nemusíme využít, pokud je dán jinak základní kapitál výběrové fáze)

Vstupní hodnoty:

Částka K_0 ukládaná na začátku každého úr. období	10000
Počet úrokovacích období (vkladů) m	120
Délka úrokovacího období (dní) t	30
Roční úroková míra i (des. číslem)	0,05
Zdaňovací koeficient k	0,85

Výstupní hodnoty:

Výsledný kapitál K_m (naspořená částka)	1497357

Pozn.: Výsledný kapitál K_m spořící fáze nutno ručně přenést do položky základní kapitál K ve výběrové fázi

Výběrová fáze (hodnoty t, i předpokládáme stejné jako ve spoř. fázi)

Vstupní hodnoty:

Základní kapitál K	1497357
Počet úrok. období (výplat renty) n	60

Výstupní hodnoty:

Výše renty R vyplacené vždy na konci úr. období	27745
Celková částka C vyplacená v rentách	1664722
Budoucí hypotetický kapitál K_n*	1851185

* K_n je budoucí kapitál, který by byl na účtu, kdyby se tam základní kapitál K ponechal bez vkladů a výběrů po dalších n úrok. období.

Vzorce:

Naspořená částka ve spořící fázi

$$K_m = K_0 \cdot \left(1 + k \cdot i \cdot \frac{t}{360}\right) \cdot \frac{\left(1 + k \cdot i \cdot \frac{t}{360}\right)^m - 1}{k \cdot i \cdot \frac{t}{360}}$$

Výše renty za jedno úrok. období

$$R = K \cdot \frac{\left(1 + k \cdot i \cdot \frac{t}{360}\right)^n \cdot k \cdot i \cdot \frac{t}{360}}{\left(1 + k \cdot i \cdot \frac{t}{360}\right)^n - 1}$$

Celková částka vyplacená v n rentách

$$C = R \cdot n$$

Budoucí hypotetický kapitál

$$K_n = K \cdot \left(1 + k \cdot i \cdot \frac{t}{360}\right)^n$$

E_Spor_Kombin.xlsx

Program počítá celkový kapitál na účtu za n let při pravidelně spořené částce m – krát za rok. Předpokládá se úročení na konci kalendářního roku.

SPOŘENÍ KOMBINOVANÉ

Pavel Krejča, 2012

Na počátku každé m-tiny roku ukládáme S Kč, úrokovací období je 1 rok, úročíme vždy na konci roku. Meziročně předpokládáme složené úročení. Program počítá naspořenou částku za jeden rok včetně úroků a celkový úrok a celkovou naspořenou částku za n let spoření.

Vstupní hodnoty:

Částka S ukládaná na začátku každé m -tiny roku	1000
Počet úrokovacích období (vkladů) za rok - m	12
Počet let spoření n	5
Roční úroková míra i (des. číslem)	0,02
Zdaňovací koeficient k	0,85

Výstupní hodnoty:

Částka naspořená za jeden rok vč. úroku - S_r	12111
Výsledný kapitál za n let - K_n	62647
Celkový úrok za n let - u_n	2647

Vzorce:

Částka naspořená za jeden rok včetně úroku

$$S_r = S \cdot m \cdot \left(1 + \frac{i \cdot k \cdot (m+1)}{2m}\right)$$

Kapitál na konci n - tého roku

$$K_n = S_r \cdot \frac{(1 + k \cdot i)^n - 1}{k \cdot i}$$

Celkový čistý úrok za n let

$$u_n = K_n - S \cdot m \cdot n$$

PRO VÝPOČTY LZE POUŽÍT I NĚKTERÝ Z MNOHA FINANČNÍCH KALKULÁTORŮ NA INTERNETU.

Obr.1.: Ukázka webového kalkulátoru na www.sfinance.cz

Splátkový kalkulátor

Potřebujete zjistit výši měsíční splátky včetně poměru úroku a úmoru? Náš splátkový kalkulátor vám odkryje tajemství každého úvěru.

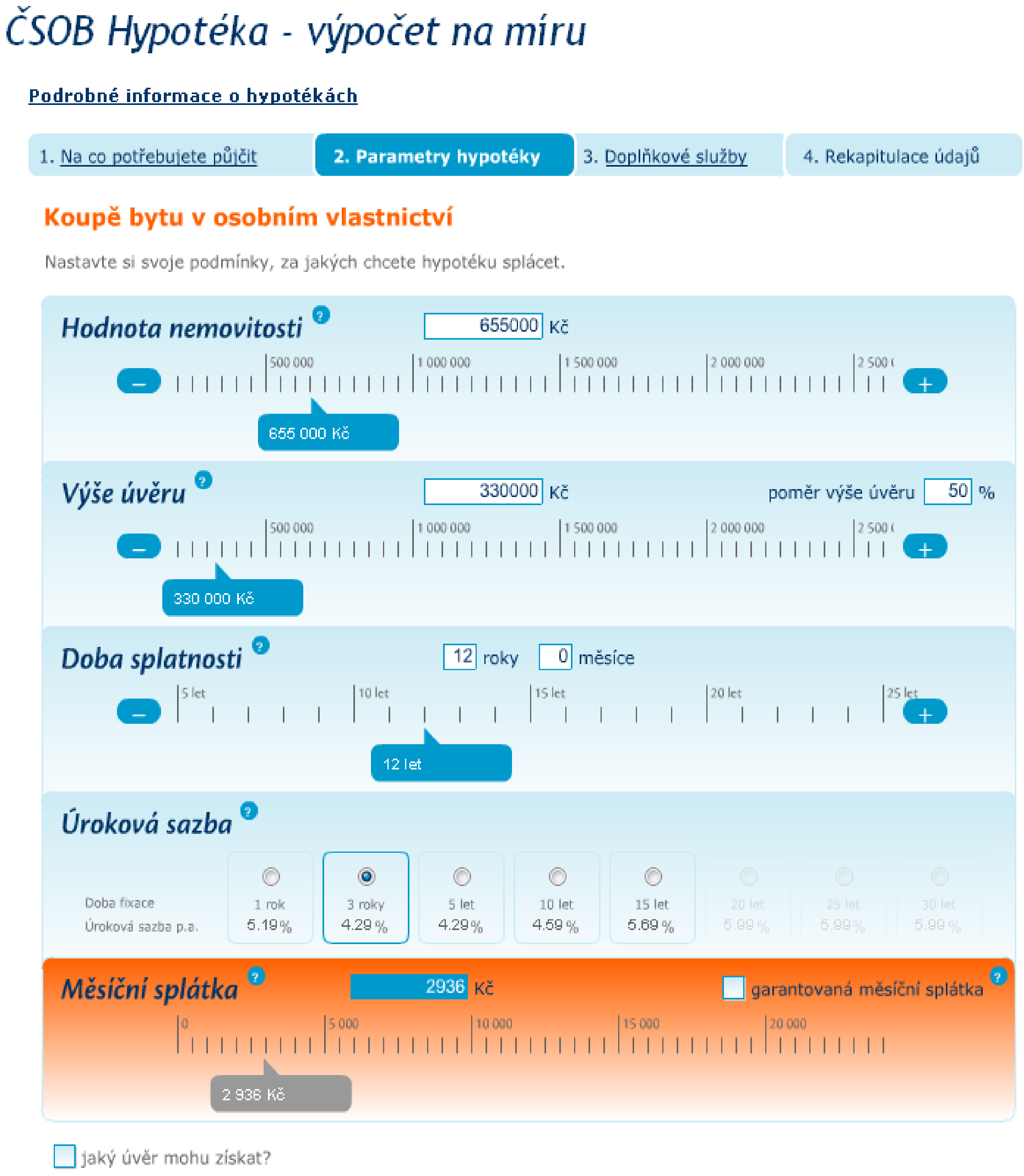
Spočítat si můžete nejen **měsíční splátku**, ale i **úrokovou sazbu**, **délku** nebo **výši** úvěru – podle toho, jaké údaje víte, kterou neznámou chcete dopočítat. Snadno si uděláte jasno i o úrokových sazbách uváděných měsíčně (tzn. ne p. a.) a půjčkách kratších než 1 rok.

U každého úvěru zjistíte, kolik na konci finančnímu ústavu zaplatíte navíc. Rovněž uvidíte, kolik budete v měsíční splátce platit na **úrocích**, a o kolik si budete snižovat samotnou **jistinu** - díky ilustračnímu **grafu** a **přehledné tabulce**.

varianta:	spočítat měsíční splátku	
měsíční splátka:	2 152	Kč
úroková sazba:	12	% ročně
délka úvěru:	10	v letech
výše úvěru:	150000	Kč
	Spočítej	Vynuluj
navýšení úvěru:	108 240	Kč

Zobrazit tabulku úrok úmor | Zobrazit graf

Obr.2.: Ukázka webového kalkulátoru na www.csob.cz



POSTUP PŘI UŽITÍ KALKULÁTORU TEXAS INSTRUMENTS VOYAGE 200 (TI 92+, TI 89, TI-NSPIRE AJ.)

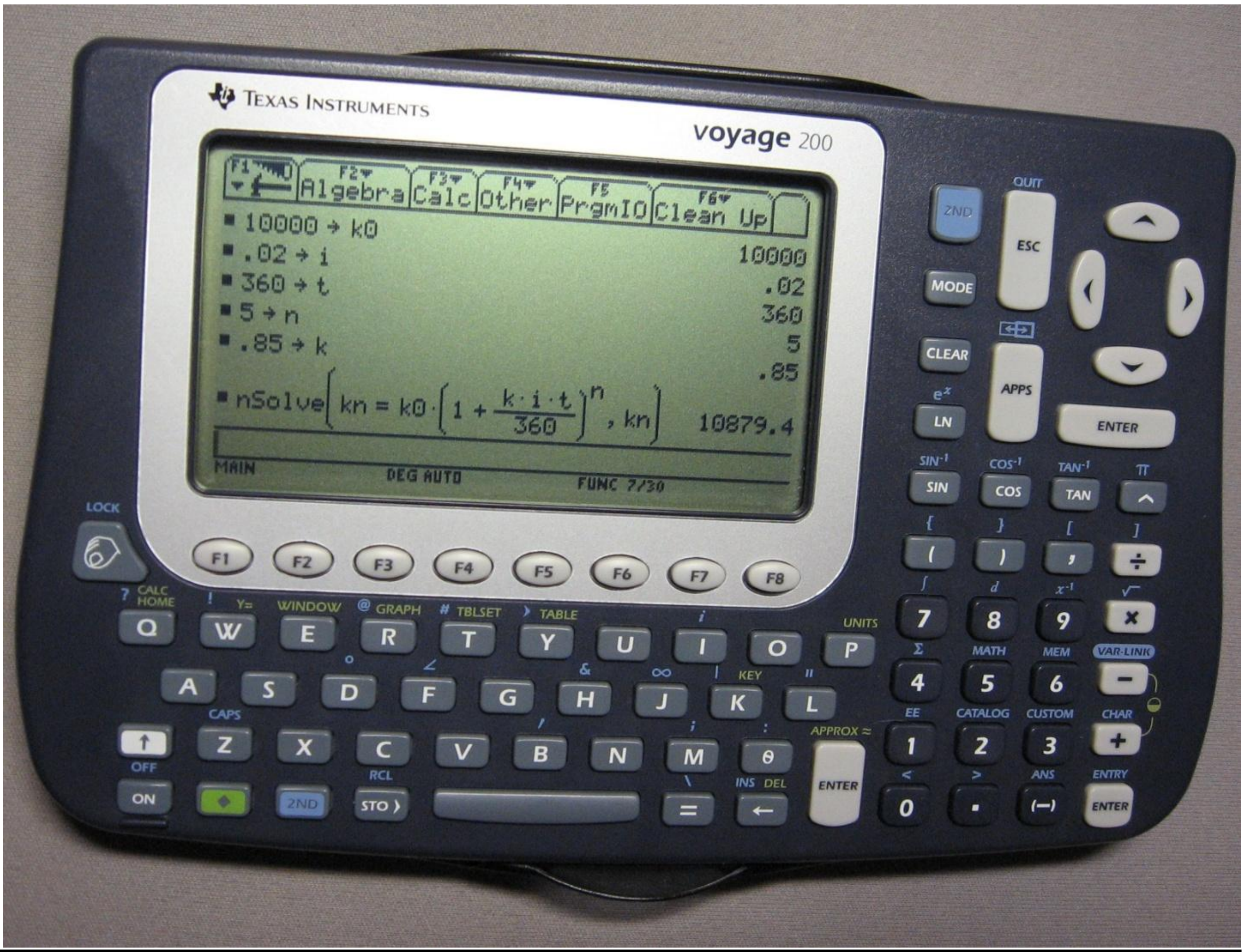
1) Příkazem DelVar zrušíme hodnoty proměnných, které se vyskytují ve vzorci, který používáme k řešení úlohy, obvykle zadáme: **DelVar kn,k0,i,t,n,k**

2) Proměnným, jejichž hodnoty jsou dány, přiřadíme tyto hodnoty klávesou "STO", pro každou proměnnou zvlášť, v pořadí: ***hodnota "STO" proměnná**.*
   Na displeji se zobrazí postupně např. 0.85 → k , 0.02 → i, atd.
   Proměnné (neznámé), kterou ze vzorce počítáme, hodnotu nepřiřazujeme!!

3) Zadáme příkaz k vyřešení zvolené rovnice vzhledem k hledané neznámé ve tvaru:
   nSolve(rovnice, neznámá)

Poznámka: Všechny příkazy odesíláme k provedení klávesou ENTER.

Obr.3.: Řešení úlohy na složené úročení na kalkulačce Texas Instruments Voyage 200



6 TESTY

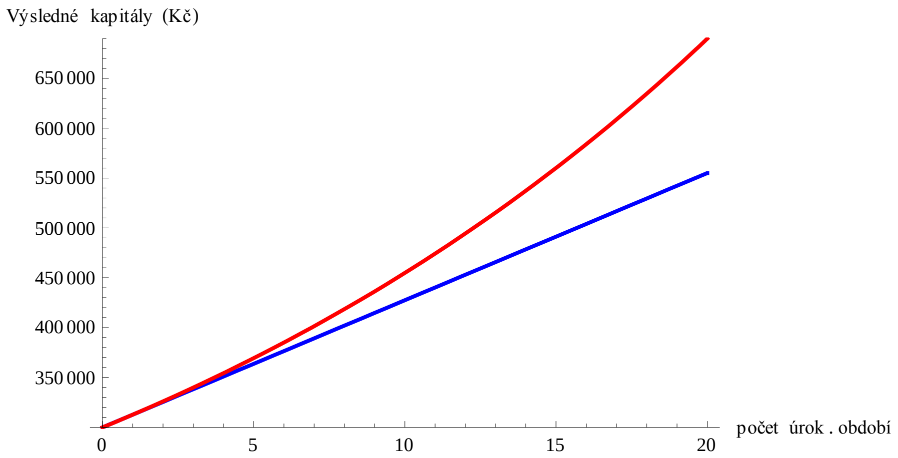
Tato kapitola je z dokumentu zveřejněného na webu školy vyřazena.

Výsledky úloh

1.1 a) 10 272 Kč b) 20 463 Kč c) 7 234 Kč
1.2 a) 480 000 Kč b) 1 980 000 Kč c) asi 13,3%
1.3 Prodělala asi 344 Kč.
1.4 Při značení zavedeném v úvodu platí $T = t \cdot n$.
1.5 44 400 Kč
1.6 286 Kč, 243 Kč
1.7 27 Kč
1.8 Aritmetickou posloupnost s prvním členem 100 255 Kč a diferencí 255 Kč. Na konci roku je na účtu částka 103 060 Kč (12.člen posloupnosti).
1.9 Vyplatí se počkat a částku investovat (pokud nemovitost zatím nepotřebujeme).
1.10 a) 62 481 Kč b) 62 490 Kč c) 62 494 Kč d) 62 497 Kč
1.11 211 791 Kč
1.12 a) 3 876 Kč b) 3 971 Kč c) 95 Kč
1.13 90 768 Kč
1.14 90 746 Kč
1.15 195 971 Kč
1.16 17 krát (celkově se úročí 18 krát)
1.17 Asi 1,9%
1.19 Asi 2,02%
1.20. a) 103 609 Kč b) 103 621 Kč c) 103 631 Kč
1.21 Počáteční vklad 200 000 Kč, úroková míra 3 %.
1.23 Kapitály v Kč:

n (let)	jednoduché úročení	složené úročení
5	363 750	369 404
10	427 500	454 864
15	491 250	560 096
20	555 000	689 672

Graf (jednoduché úročení – modrá, složené úročení – červená):



1.24 70 663 Kč

2.2 Tabulka - umořovací plán (vše v Kč):

Měsíc	Dluh Počáteční stav	Úrok	Úmor	Dluh Koncový stav
1.	800 000	10 000	129 227	670 773
2.	670 773	8 385	130 842	539 931
3.	539 931	6 749	132 478	407 453
4.	407 453	5 093	134 134	273 319
5.	273 319	3 416	135 811	137 508
6.	137 508	1 719	137 508	0
CELKEM		35 362	800 000	

Anuita (měsíční splátka): 139 227 Kč
Celkový úrok: 35 362 Kč
Celková částka zaplacená bance: 835 362 Kč

2.3 Tabulka - umořovací plán (vše v Kč):

Pololetí	Dluh Počáteční stav	Úrok	Úmor	Dluh Koncový stav
1.	1 400 000	112 000	288 000	1 112 000
2.	1 112 000	88 960	311 040	800 960
3.	800 960	64 077	335 923	465 037
4.	465 037	37 203	465 037	0
CELKEM		302 240	1 400 000	

Poslední splátka: 502 240 Kč
Celkový úrok: 302 240 Kč
Celková částka zaplacená bance: 1 702 240 Kč

2.4 a) umořovací plán (vše v Kč):

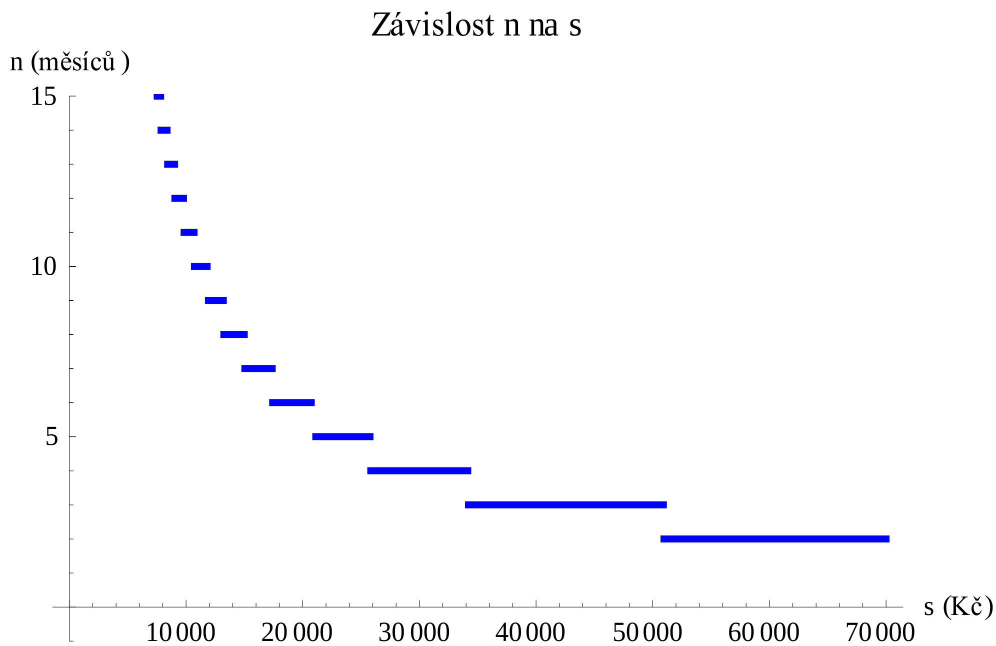
Rok	Dluh Počáteční stav	Úrok	Úmor	Dluh Koncový stav
1.	2 500 000	350 000	550 000	1 950 000
2.	1 950 000	273 000	627 000	1 323 000
3.	1 323 000	185 220	714 780	608 220
4.	608 220	85 151	608 220	0
CELKEM	----	893 371	2 500 000	----

b) 4 roky
c) Poslední splátka je 693 371 Kč.
d) Celkový úrok činí 893 371 Kč.

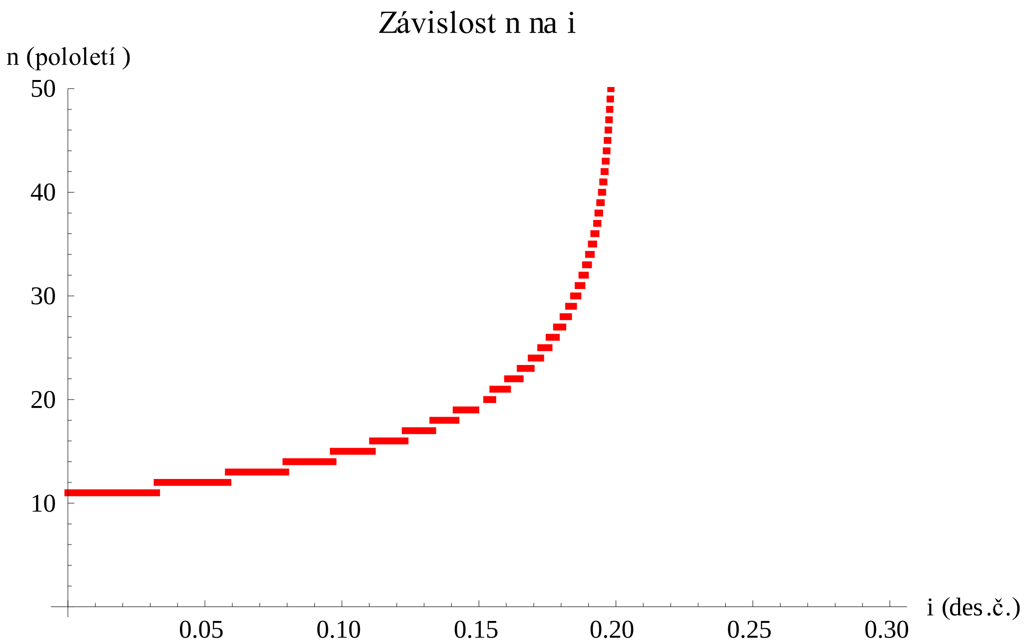
2.6 a) $n = 19$, úvěr bude splacen koncem dubna roku 2013
b) 2717 Kč
c) 717 Kč

2.7

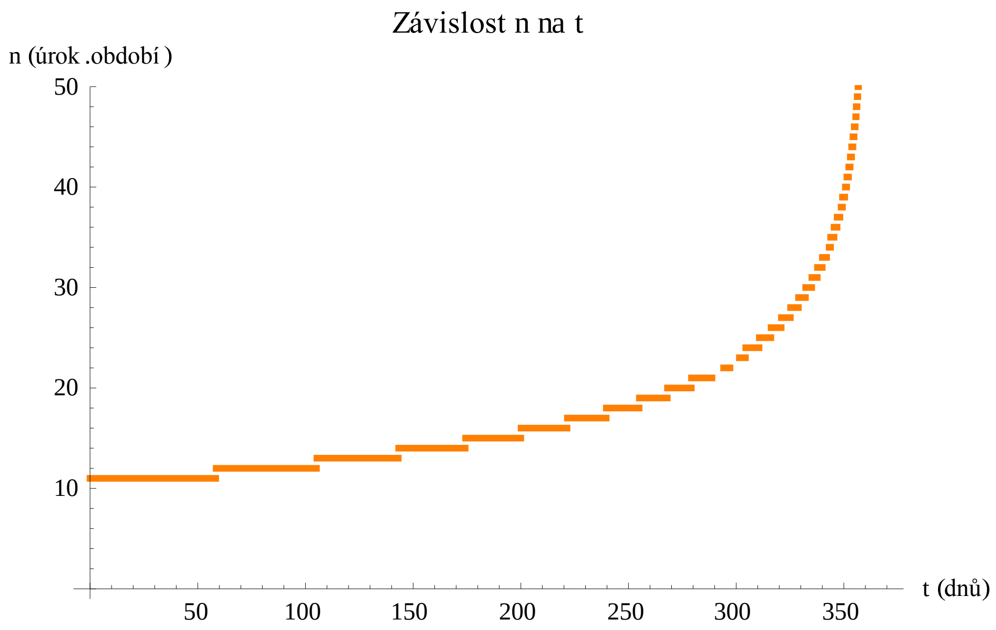
a) V = 100 000 Kč, i = 0,15 , t = 30 dnů



b) V = 100 000 Kč, s = 10 000 Kč, t = 180 dnů



c) V = 100 000 Kč, s = 10 000 Kč, i = 0,1



2.8 a) 218 175 Kč, 36 350 Kč
b) 149 644 Kč, 48 931 Kč
c) 94 959 Kč, 74 794 Kč
d) 54 347 Kč, 143 470 Kč

2.10 a) 43 000 Kč b) 978 Kč
2.11 17,3%
2.13 a) s = 26 273 Kč, u = 652 760 Kč, p = 0.261, N = 736 310 Kč
b) s = 16 224 Kč, u = 1 393 760 Kč, p = 0.558, N = 1 537 310 Kč
c) s = 13 117 Kč, u = 2 222 120 Kč, p = 0.889, N = 2 425 670 Kč

2.14

n (měsíců)	doba splácení (let)	u (Kč)	p = u/v	p %
12	1	32797	0,033	3,3
24	2	63695	0,064	6,4
36	3	95190	0,095	9,5
48	4	127281	0,127	12,7
60	5	159968	0,160	16,0
120	10	332246	0,332	33,2
180	15	518942	0,519	51,9
240	20	719435	0,719	71,9
300	25	932904	0,933	9,33
360	30	1158382	1,158	115,8

2.15 a) 7235 Kč b) 502 300 Kč c) 528 900 Kč

2.16

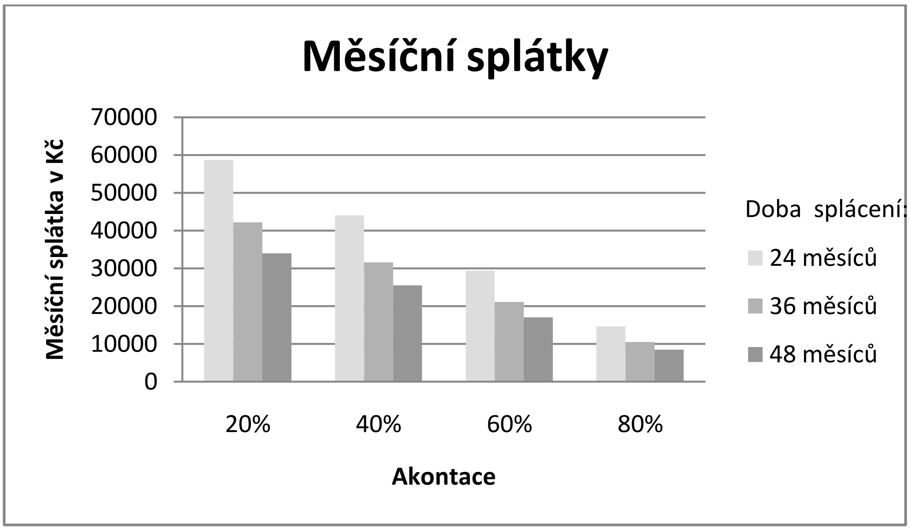
a), b)

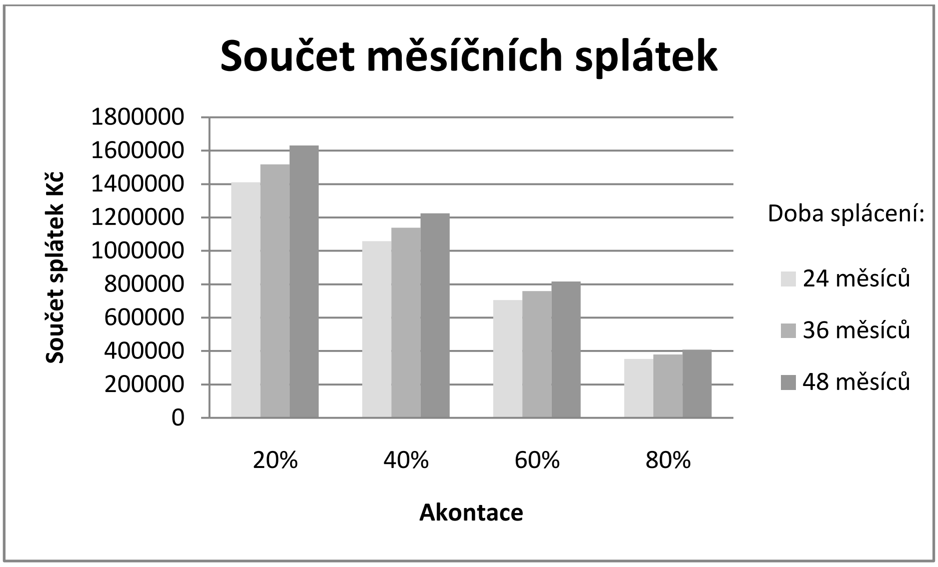
Akontace %	Měsíční splátka v Kč			Součet splátek v Kč		
	24 měsíců	36 měsíců	48 měsíců	24 měsíců	36 měsíců	48 měsíců
20	58755	42195	34005	1410120	1519020	1632240
40	44070	31635	25515	1057680	1138860	1224720
60	29385	21090	17010	705240	759240	816480
80	14685	10545	8505	352440	379620	408240

c), d)

Akontace %	Celkově zaplacená částka v Kč			Zisk leasingové společnosti		
	24 měsíců	36 měsíců	48 měsíců	24 měsíců	36 měsíců	48 měsíců
20	1730220	1839120	1952340	230220	339120	452340
40	1677780	1758960	1844820	177780	258960	344820
60	1625340	1679340	1736580	125340	179340	236580
80	1572540	1599720	1628340	72540	99720	128340

Sloupcové grafy:





2.17 Asi 21 %.

2.19 Umořovací plán:

Měsíc	Úmor	Úrok	Splátka	Dlužná částka po zaplacení splátky
1.	20000	9600	29600	140000
2.	20000	8400	28400	120000
3.	20000	7200	27200	100000
4.	20000	6000	26000	80000
5.	20000	4800	24800	60000
6.	20000	3600	23600	40000
7.	20000	2400	22400	20000
8.	20000	1200	21200	0
Celkem	160000	43200		

Celkem zaplatí pan Oulík bance (za 4 roky) na úrocích 43 200 Kč.

2.21 Skonto je 4 250 Kč, snížená cena je 165 750 Kč.
Ušlý čistý úrok z této částky je 219 Kč.
Vyplatí se tedy použít skonto, které je vyšší o 4 031 Kč než ušlý úrok.

3.1 a) 16 068 Kč b) 48 534 Kč

3.3 a) 18 568 Kč
b) 168 Kč

3.4 a) 12 255 Kč
b) 12 139 Kč
c) 12 118 Kč
d) 12 138 Kč
e) 12 159 Kč
f) 12 160 Kč

3.5 Za 9 let.

3.6 a) 60 723 Kč b) 66 305 Kč

3.8 a) 19 662 Kč (K_0 = 2 407 Kč v jednom úr. obd.)

b) Na konci 1.čtvrtletí roku 2013. (n = 13)

3.10 $$u = S \cdot k \cdot \frac{i}{m} \cdot\ 1+2+\ldots+m\ = \frac{S \cdot i \cdot k \cdot\ m+1}{2}\ ,$$

$$S_r = S \cdot m + u = S \cdot m \cdot \left(1 + \frac{i \cdot k \cdot\ m+1}{2m}\right)\ .$$

3.11 u = 230 Kč, S_r = 24 230 Kč

3.12 S = 2500 Kč

3.13 i = 1,6 %

3.15 $$K_n = S \cdot m \cdot \left(1 + \frac{i \cdot k \cdot\ m+1}{2m}\right) \cdot \frac{1+k \cdot i\ ^{n} - 1}{k \cdot i}\ ,$$

$$u_n = K_n - S \cdot m \cdot n\ .$$

3.16 a) 5 141 Kč

b) 15 390 Kč

3.17 4 roky

3.19 a) 346 204 Kč

b) 453 796 Kč

c) 6 400 Kč

d) 80 měsíců (pak je anuita 6409 Kč)

e) 58 924 Kč

3.22 R = 135 667 Kč, C = 2 035 005 Kč

3.23 K = 268 000 Kč

3.24 a) 586 545 Kč

b) 90 495 Kč

c) 723 960 Kč

4.1. a) 7 920 Kč b) 55 920 Kč

4.2. 750 Kč

4.3. 29 937 Kč

4.4. 2.3%

4.5. 23 500 Kč

4.6. 70 669 Kč

4.7. 48 459 Kč

4.10. a) 246 120 Kč b) 246 195 Kč

4.11. a) 51375 b) 51169 c) 50963 d) 50687 e) 50344 f) 50000 Kč

4.12. 4 680 Kč

4.13. 22 280 Kč

4.14. 71 560 Kč

4.15. 1,2 %

4.16. A: 36 339 Kč B: 36 352 Kč - nejvýhodnější C: 36 328 Kč

4.17. 3365 Kč

4.18. 4 796 Kč

4.19. a) 20 390 Kč
b) 150 390 Kč

Metodické poznámky

- *tento materiál má papírovou i elektronickou podobu; první je především určena jako příručka pro učitele, druhá může být využita i pro multimediální prezentaci ve třídě nebo poskytnuta studentům k domácí přípravě*
- *příručka je vytvořena pro výuku finanční matematiky* ***v hodinách matematiky*** *na gymnáziích a dalších středních školách, ne pro výuku ekonomických předmětů na středních odborných školách. Proto se v ní nevyskytují úlohy na nalezení nejvýhodnějšího finančního produktu na internetu v dané době, porovnání výhodnosti produktů, tvorbu domácího rozpočtu a jiné úlohy zcela praktického charakteru. Důraz je naopak kladen na matematickou podstatu řešení, pochopení postupu výpočtu, popřípadě jeho důkaz.*
- *složitější úlohy jsou označeny **
- *přílohou této příručky jsou programy napsané v prostředí* ***Mathematica 7****, ty lze použít k rychlému řešení uvedených úloh alternativně k užití běžných kalkulaček, kalkulaček s finančními funkcemi nebo finančních kalkulátorů, které jsou k dispozici na internetu*
- *programy v* ***Mathematica 7*** *umožňují vygenerování neomezeného počtu obdobných úloh včetně jejich výsledků*
- *většina programů v Mathematica 7 má zjednodušenou alternativu v* ***Microsoft Excel*** *2007; doporučuje se, aby žáci vytvářeli další excelovské listy pro řešení podobných úloh*
- *pro numerické řešení některých úloh je možné užit finanční kalkulátory, které jsou nabízeny na některých webových stránkách, např. www.finance.cz, www.penize.cz, www.mesec.cz , stránkách jednotlivých bank aj.*
- *krajně vhodné je uvést řešení finančních úloh do souvislosti s problematikou* ***aritmetických a geometrických posloupností*** *a vztahů pro ně platných; nevznikne tak dojem, že vzorce uvedené v úvodu jednotlivých kapitol "spadly z nebe" jako důsledek nějaké "ekonomické teorie" odtržené od matematiky probírané ve škole*
- *kapitola 4 obsahuje jednoduché úlohy pro žáky nižšího gymnázia a posledních ročníků základní školy, týkají se převážně jednoduchého úročení; u žáků této věkové kategorie předpokládáme řešení úsudkem na základě znalostí počítání s procenty a užití přímé úměrnosti (vhodné před probíráním finančních úloh zopakovat), proto se v této kapitole na rozdíl od ostatních neuvádějí žádné finanční vzorce*
- *nakopírováním vybraných částí tohoto materiálu (včetně výběru finančních pojmů a vzorců) lze vytvořit obdobu pracovních listů; pomocí nich lze zadávat úkoly 2-4 členným skupinám žáků třídy k samostatnému vypracování při hodině*

Literatura a jiné zdroje

- *Odvárko O.: Úlohy z finanční matematiky pro střední školy, Prometheus Praha 2005, ISBN 80-7196-303-8*
- *Odvárko O.,Robová J.: Finanční matematika s kalkulačkou Casio, Prometheus Praha 2005*
- *Odvárko O.: Posloupnosti a finanční matematika pro SOŠ a stud. obory SOU, Prometheus Praha 1995, ISBN 978-80-7196-239-7*
- *Odvárko O., Kadleček J.: Matematika pro 9.roč. ZŠ - Jehlan, kužel, koule, Finanční matematika, Prometheus Praha 2001, ISBN 978-80-7196-283-0*
- *Odvárko O.: Matematika pro gymnázia – Posloupnosti a řady, Prometheus Praha 1995, ISBN 80-7196-195-7*
- *Klínský P.,Chromá D.: Finanční gramotnost - úlohy a metodika, NÚOV Praha 2008*
- *Klínský P.,Chromá D.,Tesařová S.,Janák M.: Finanční gramotnost - obsah a příklady z praxe škol, NÚOV Praha 2008*
- *Radová J. a kol.: Finanční matematika pro každého (7.vydání), Grada Praha 2009, ISBN 978-80-247-3291-6*
- *webové stránky http://www.penize.cz , http://www.finance.cz , http://www.mesec.cz , http://www.hypoteky-pujcky-uvery.cz aj.*
- *Petrášková V., Hašek R.: Úvod do financí KMA/ÚF, elektronická učebnice na http://www.pf.jcu.cz/stru/katedry/m/uf/*